

1. Rovnice a nerovnice s parametrem

Řešte V R s neznámou x a parametrem $a \in R$:

$$1. \frac{x+a}{a} = ax - 1; \quad [D : a = 0..ns; a = \pm 1..K = \emptyset; a \neq 0 \& a \neq \pm 1..K = \{\frac{2a}{a^2-1}\}]$$

$$2. \frac{ax-1}{x+2} = \frac{ax+1}{x-2}; \quad [D : a = -\frac{1}{2}..K = R - \{\pm 2\}; a \neq -\frac{1}{2}..K = \emptyset]$$

$$3. \frac{2-a}{a} = \frac{2}{x-1}; \quad [D : a = 0..ns; a = 2..K = \emptyset; a \neq 0 \& a \neq 2..K = \{\frac{a+2}{2-a}\}]$$

$$4. \frac{a}{x} - \frac{4}{ax} = 1 - \frac{2}{a}; \quad [D : a = 0..ns; a = 2..K = R - \{0\}; a = -2..K = \emptyset; a \neq 0 \& a \neq \pm 2..K = \{a+2\}]$$

$$5. 1 + \frac{a^2-1}{x} = a; \quad [D : a = 1..K = R - \{0\}; a = -1..K = \emptyset; a \neq \pm 1..K = \{a+1\}]$$

$$6. \frac{a^2(x-1)}{ax-2} = 2; \quad [D : a = 0..K = \emptyset; a = 2..K = R - \{1\}; a \neq 0 \& a \neq 2..K = \{\frac{a+2}{a}\}]$$

$$7. ax - \frac{2}{a^2} = \frac{1}{a}(4x+1); \quad [D : a = 0..ns; a = 2..K = \emptyset; a = -2..K = R; a \neq 0 \& a \neq \pm 2..K = \{\frac{1}{a(a-2)}\}]$$

$$8. \frac{2}{a(x-3)} + \frac{3}{(a-1)(x+1)} = \frac{x-5}{a(x+1)(x-3)}; \quad [D : a = 0 \text{ ora } = 1..ns; a = -1 \text{ ora } = \frac{1}{4}..K = \emptyset; a \neq \text{all}..K = \{\frac{2a+7}{4a-1}\}]$$

9. VIP Obvod předního kola vozu je a metrů, zadního b metrů ($b > a$ formule 1). Na jak velké vzdálenosti udělá přední kolo o 1 otáčku víc než zadní? [$\frac{ba}{b-a}$ metru]

10. VIP Při které hodnotě parametru a je součet druhých mocnin kořenů rovnice $x^2 - (a-2)x - a - 1 = 0$ nejmenší? [$a = 1$]

11. VIP Při které hodnotě parametru a je součet druhých mocnin kořenů rovnice $x^2 + (a+2)x + a + 1 = 0$ nejmenší? [$a = -1$]

$$12. ax^2 - (a-1)x - 1 = 0; \quad [D : a = 0..K = \{1\}; a \neq 1..K = \{\frac{p-1 \pm |p+1|}{2p} = \dots\}]$$

$$13. x^2 - x + a = 0; \quad [D : \text{vcetne_complex_reseni} \dots]$$

Vietovy vzorce: prakticky na $2x^2 - 4x - 6 = 0$; $x_1 + x_2 = \frac{4}{2}$; $x_1 \cdot x_2 = -\frac{6}{2}$

14. Sestavte kvadratickou rovnici jejíž kořeny jsou rovny druhým mocninám kořenů $3x^2 - 15x + 2 = 0$ aniž ji řešíte. [$9x^2 - 213x + 4 = 0$]

15. Sestavte kvadratickou rovnici, která má kořeny převrácené hodnoty kořenů $6x^2 - 13x + 6 = 0$, aniž ji řešíte. [$6x^2 - 13x + 6 = 0$]. the same

16. V rovnici $ax^2 - 8a + 4 = 0$ určete a tak, aby jedním kořenem byl $\frac{2}{3}$; [$a = 3$; $x_2 = 2$]

17. SUPER VIP Vodní nádrž se naplní jedním přívodem o 4, druhým o 9 hodin později než oběma najednou. Za jak dlouho se naplní každým zvlášť? $\left[\frac{1}{t_1} - 4 = \frac{1}{\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}}; \frac{1}{t_2} - 9 = \frac{1}{\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}} \right]$
[10, 15h]

18. Dva traktory zorají pole za 4 hodiny. Kdyby první traktor zoral $\frac{1}{2}$ pole a druhý práci dokončil, trvalo by to 9 hodin. Za jak dlouho zorá pole každý zvlášť? [12, 6h]
 $\left[\frac{1}{t_1} - 4 = \frac{1}{\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}} = \frac{1}{t_2} - 9 \right]$

19. $ax^2 - 2x + 1 = 0$;
 $[D : a = 0..K = \{\frac{1}{2}\}; a = 1..K = \{1\}; a < 1 \& a \neq 0..K = \{\frac{2 \pm \sqrt{4-4a}}{2a}\}; a > 1..K = \{\frac{2 \pm i\sqrt{4-4a}}{2a}\}]$

20. $x^2 - ax + 1 = 0$;
 $[D : a = 2..K = ; a = -2..K = ; a \in (-\infty; -2) \text{ or } (2; \infty)..K = ; a \in (-2; 2)..K =]$

21. $x^2 - 2x - p + 1 = 0$; $[D : p = 0..K = ..; p > 0..K = ...; p < 0..K = ...]$

22. $(a + 10)x^2 + 6x - a = 0$;
 $[D : p = \{-9; -1\}..K = \{-\frac{3}{a+10}\}; p \in (-9; -1)..K = \emptyset; p \in (-\infty; -9) \cup (-1; \infty)..K = \{\frac{-6 \pm \sqrt{D}}{2(a+10)}\}]$

23. $x^2 - 2px - 2x + 2p + 10 = 0$
 $[D : p \in (-\infty; -3)..K = \{\frac{2p+2 \pm \sqrt{4p^2-36}}{2}\}; p \in \{-3; 3\}..K = \{p+1\}; p \in (-3; 3)..K = \{*\}]$
 $[* = \frac{2p+2 \pm i\sqrt{|4p^2-36|}}{2}]$

24. Je dána rovnice $px(3x+4) = x^2 + 1$. V závislosti na parametru $p \in R$ určete počet řešení dané rovnice v R.
 $[p = \frac{1}{3} \text{ lineární}; p \in (-\infty; -1) \cup (\frac{1}{4}; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{3}; \infty)..2 \text{ kořeny}; p \in \{-1; \frac{1}{4}\}... \text{ dvojnás};]$
 $[p \in (-1; \frac{1}{4})... \text{ zadne_reseni}]$

25. Je dána rovnice $(a+1)x^2 - 2(a+3)x + 2a^2 - 7a + 3 = 0$. Určete všechny hodnoty parametru $a \in R$, pro která má rovnice jeden kořen roven 0. Potom určete druhý kořen-
 $[x = 0 \text{ dosadit} \rightarrow a = \frac{1}{2}..x_2 = \frac{14}{3}; a = 3..x_2 = 3]$

26. Je dána rovnice $t(x^2 + 1) - 3 = x(x - 2t)$. Určete všechny hodnoty reálného parametru t, pro která má rovnice:

1. Dva různé reálné kořeny $[D > 0 \& -\frac{b}{a} > 0 \& \frac{c}{a} > 0 \rightarrow (\frac{3}{4}; 1)]$
2. Dva různé reálné záporné kořeny $[D > 0; -\frac{b}{a} < 0 \& \frac{c}{a} > 0 \rightarrow (3; \infty)]$
3. Dva různé reálné kořeny opačných znamének $[D > 0 \& \frac{c}{a} < 0 \rightarrow (1; 2)]$

27. Je dána rovnice $x^2 - (m+3)x + m - 13 = 0$. Určete všechny hodnoty reálného parametru m tak, aby rovnice měla kořeny dvě vzájemně opačná čísla. $[-\frac{b}{a} = 0..m = -3]$

28. Je dána rovnice $x^2 - (m+3)x + m - 13 = 0$. Určete všechny hodnoty reálného parametru m tak, aby daná rovnice měla kořeny dvě navzájem převrácená čísla. $[\frac{c}{a} = 1 \rightarrow m = 14]$

29. Řešte v \mathbb{R} : $(a-3)ax > 3-a$

30. Řešte v \mathbb{R} : $\frac{p}{3} - \frac{x}{p} \leq \frac{x}{3} + \frac{4}{p}$; []

$$\frac{p}{4} - \frac{x}{p} \geq \frac{2}{p} + \frac{x}{4};$$

$$\left[p = 0 \dots ns; p > 0 \dots K = (-\infty; \frac{p^2+8}{p+4} \}; p \in (-\infty; -4) \cup (-4; 0) \dots K = \langle \frac{p^2+8}{p+4}; \infty \rangle \right]$$

$$[p = -4 \dots K = \emptyset]$$

31. Řešte pro parametr p a proměnnou x :

$$x^2 - 6x - p \geq 0; \left[p < -9 \dots K = \mathbb{R}; p \geq -9 \dots K = (-\infty; 3 - \sqrt{p+9} > \cup \right]$$

$$\left[\cup < 3 + \sqrt{p+9}; \infty \right)$$

2. Iracionální (ne)rovnice

- ROVNICE = **podmínky nedělám**, protože **dělám zkoušku**, kvůli neekvivalentnosti některých úprav (umocněním přibývají kořeny),
- pozor na dělení výrazem s neznámou, buď mám ošetřeno, kdy je nenulový nebo je to superprůšvih!!!
- SUBSTITUCE - u rovnic, když se někde v rovnici výraz s proměnnou „podezřele“ opakuje (nebo „si je dost podobný“), položíme $a =$ výraz
- kouknu a pak teprve umocňuji, záleží na zkušenostech a šikovnosti (kam šoupnu odmocniny, aby se mně lépe a elegantněji řešilo)
- NEROVNICE = musím určit podmínky nezápornosti pod odmocninou (definiční obor) a otázka řešení pro kladné/záporné druhé strany bez odmocnin vzhledem k dané nerovnosti - vytvořím **INTERVAL MOŽNÝCH ŘEŠENÍ (zlatý)**, ten potom **pronikám** s výsledkem upravovaných nerovností
- Pozor na násobení, dělení výrazem s proměnnou!!!!!!! Musím mít ošetřeno nejenom nenulovost u dělení, ale hlavně kladnost, **zápornost výrazu**, kterým násobím - kvůli případnému **otáčení znaménka nerovnosti!!!!**

Řešte v R:

$$1. \sqrt{12-x} = x; \quad [3]$$

$$2. 1 - \sqrt{1+5x} = x; \quad [0]$$

$$3. 4\sqrt{x+6} = x+1; \quad [19]$$

$$4. 6x - 13\sqrt{x} + 6 = 0; \quad \left[\frac{4}{9}; \frac{9}{4}\right]$$

$$5. \sqrt{2x+6} - \sqrt{x+1} = 2; \quad [-1; 15]$$

$$6. \sqrt{2x+5} = 8 - \sqrt{x-1}; \quad [10]$$

$$7. \sqrt{4-x} + \sqrt{5+x} = 3; \quad [-5; 4]$$

$$8. \sqrt{3x-7} - \sqrt{x+1} = 2; \quad [8+4\sqrt{2}]$$

$$9. 2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} = 2; \quad [1]$$

$$10. 4\sqrt{8-x} - \sqrt{6x+150} = 0; \quad [-1]$$

$$11. \sqrt{x+3} + \sqrt{x+4} = \sqrt{5}; \quad \left[-\frac{11}{5}\right]$$

$$12. \sqrt{7-2\sqrt{x}} = \sqrt{18-13\sqrt{x}}; \quad [1]$$

$$13. \sqrt{x+1} + \sqrt{4x+13} = \sqrt{3x+12}; \quad [-1]$$

$$14. \sqrt{x} + \sqrt{x-3} = \sqrt{3(x-1)}; \quad [4]$$

15. $\sqrt{x+5} + \sqrt{2x-7} = 2\sqrt{x}; [4]$

16. $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} = \sqrt{4x+5}; [-1]$

17. $\sqrt{2x-1} = \sqrt{x+4} - \sqrt{5-x}; [\frac{1}{2}; 5]$

18. $\sqrt{4+2x-x^2} = x-2; [3]$

19. $\sqrt{6-4x-x^2} = x+4; [-1]$

20. $\sqrt{5-x^2} = x-1; [2]$

21. $x - \sqrt{x^2 - 11} = 1; [6]$

Substituce

22. $x^2 - 4x + 6 = \sqrt{2x^2 - 8x + 12}; [2]$

23. $x^2 + \sqrt{x^2 + 2x + 8} = 12 - 2x; [-4; 2]$

24. $2x^2 + \sqrt{2x^2 - 4x + 12} = 4x + 8; [1 \pm \sqrt{3}]$

25. $3x^2 + 15x + 2\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2; [-5; 0]$

26. $\sqrt{29-x^2} + \sqrt{25-x^2} = 2; [\pm 5; y = 25 - x^2]$

27. $\sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 3; [< 2; +\infty)$

28. $\frac{\sqrt{x+13} + 2}{\sqrt{x+13} - 4} = 7; [12]$

29. $\sqrt{2+x} + \sqrt{x} = \frac{4}{\sqrt{2+x}}; [\frac{2}{3}]$

30. $\frac{x - \sqrt{x+1}}{x + \sqrt{x+1}} = \frac{5}{11}; [8]$

31. $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{x}}{2-x} = \sqrt{\frac{1}{2-x}}; [0]$

32. $\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-10}} = \frac{\sqrt{3x+22}}{\sqrt{3x-14}}; [26]$

33. $\frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{x^2}; [\pm \frac{\sqrt{3}}{2}]$

34. $\sqrt{x\sqrt{x}-x} + \sqrt{x} - x = 0; [0; 1; 4]$ (super extra VIP $\sqrt{x+1} + x^2 - 2x - 1 = 0; [0; \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$)

35. Řešte v R:

1. $\sqrt{x+61} < x+5; [(3; \infty)]$

2. $\sqrt{x+18} < 2-x; [< -18; -2)]$

$$3. \quad 2\sqrt{x-1} < x; [< 1; 2) \cup (2; \infty)]$$

36. Řešte v R:

$$1. \quad x + 2 < \sqrt{x + 14}; [< -14; 2)]$$

$$2. \quad x - 1 < \sqrt{7 - x}; [(-\infty; 3)]$$

$$3. \quad \sqrt{9x - 20} > x; [(4; 5)]$$

$$4. \quad \sqrt{11 - 5x} > x - 1; [(-\infty; 2)]$$

$$5. \quad \sqrt{x + 2} > x; [< -2; 2)]$$

37. Řešte v R:

$$1. \quad \sqrt{x^2 + 3x + 3} < 2x + 1; [(\frac{2}{3}; \infty)]$$

$$2. \quad x + 4 > 2\sqrt{4 - x^2}; [< -2; -\frac{8}{5}) \cup (0; 2 >]$$

$$3. \quad \sqrt{3x - x^2} < 4 - x; [< 0; 3 >]$$

$$4. \quad 3 - x > 3\sqrt{1 - x^2}; [< -1; 0) \cup (\frac{3}{5}; 1 >]$$

38. Řešte v R:

$$1. \quad \sqrt{x^2 + 1} > x - 1; [R]$$

$$2. \quad 1 - x < \sqrt{x^2 - 2x}; [< 2; \infty)]$$

$$3. \quad \sqrt{8 + 2x - x^2} > 6 - 3x; [(1; 4 >]$$

$$4. \quad \sqrt{-x^2 + 6x - 5} > 8 - 2x; [(3; 5 >]$$

$$5. \quad (x - 1)\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 0; [< 2; +\infty)]$$

39. Řešte v R:

$$1. \quad \sqrt{\frac{x-2}{1-2x}} > -1; [(\frac{1}{2}; 2 >]$$

$$2. \quad \sqrt{\frac{3x-1}{2-x}} > 1; [(\frac{3}{4}; 2)]$$

$$3. \quad \frac{\sqrt{x}-3}{x-2} > 0; [< 0; 2) \cup (9; \infty)]$$

$$4. \quad \frac{x^2-13x+40}{\sqrt{19x-x^2-78}} < 0; [(6; 8 >]$$

$$5. \quad \frac{\sqrt{x+20}}{x-1} < 0; [(-20; 1)]$$

40. Řešte v R:

$$1. \quad \sqrt{3x - 10} > \sqrt{6 - x}; [(4; 6 >]$$

$$2. \quad 3\sqrt{x} - \sqrt{x + 3} > 1; [(1; \infty)]$$

$$3. \quad 3\sqrt{x} - \sqrt{5x + 5} > 1; [(4; \infty)]$$

$$4. \quad \sqrt{x + 3} + \sqrt{x + 15} < 6; [< -3; 1)]$$

$$5. \quad \sqrt{x + 3} + \sqrt{x + 2} - \sqrt{2x + 4} > 0; [< -2; \infty)]$$

$$6. \quad \text{miniVIP } x + 4a > 5\sqrt{ax}; a \dots \text{parametr}; [< 0; a) \cup (16a; \infty)]$$

41. Zpátky k rovnicím. Řešte v R:

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt{x} = 12; [81]$$

3. Absolutní hodnoty

$|a| = a$ pro $a \geq 0$

$|a| = -a$ pro $a < 0$ | | vždy vrací nezáporné číslo

- geometricky - vzdálenost od bodu vedle znaménka - uvnitř absolutní hodnoty
- Jedna abs. hodnota = rychlé řešení +, - a zkouškou ověřím, dvě a více = Intervaly, intervaly a zase intervaly :-)
- Úprava znamének uvnitř absolutní hodnoty (lehčí práce); pozor na výraz s proměnnou ve jmenovateli
- Otázka úprav nerovnic v podílovém tvaru
- Grafické řešení: lineární = klikatice přes osu x, kvadratické = parabola překlopená o osu x = načrtnout
- Grafické řešení nerovnic = plocha pod nebo nad grafem, intervaly (přesné body stejně musíme spočítat)

Řešte v R:

1. $|x + 4| = 2$

2. $|x + 4| = -1$; ehm :-)

3. $|x + 2| + |x - 1| = 3$; $[-2; 1]$

4. $|x - 1| - |x - 2| = 1$; $[-2; +\infty)$

5. $|2 - x| + |-x - 2| = 2x + 2$; $[1]$

6. $|2x + 1| + |1 - 2x| = 3$; $[\pm \frac{3}{4}]$

7. $|x + 19| = |x - 11|$; $[-4]$

8. $|x - 3| = 1 - x$; $[\emptyset]$

9. $|x + 3| = 2x - 7$; $[10]$

10. $|x| + 2|x + 1| - 3|x - 3| = 0$; $[\frac{7}{6}]$

11. $|x + 5| - |x - 2| = |x| - x + 7$; $[-2; +\infty)$

12. VIP $||3 - 2x| - 1| = 2|x|$; $[\frac{1}{2}]$

13. $|x^2 - 3x + 3| = 2$; $[\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}]$

14. $|2x - x^2 + 3| = 2$; $[1 \pm \sqrt{2}; 1 \pm \sqrt{6}]$

15. $(x + 1)^2 - 2|x + 1| + 1 = 0$; $[-2; 0]$

16. $x^2 + 2x - 3|x + 1| + 3 = 0$; $[-3; -2]$

17. $|x^2 + 3x| - 4 = 0; [-4; 1]$

18. $2x^2 + 5|x| - 7 = 0; [-1; 1]$

19. $|x^2 - 9| + |x - 2| = 5; \left[-3; 2; \frac{-1+\sqrt{65}}{2}\right]$

20. $|x^2 - 9| + |x^2 - 4| = 5; [< -3; -2 > \cup < 2; 3 >]$

21. $|x^2 + 2x| - |2 - x| = |x^2 - x|; \left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$

22. $\frac{|x+2|}{|x+3|} = 3; \left[-\frac{23}{8}; -\frac{19}{6}\right]$

23. $\frac{|x+3|}{|x-3|} = x + 7; \left[\frac{-3\pm\sqrt{105}}{2}\right]$

24. $\frac{|x+3|}{|x-3|} = 3; [-6; 6]$

25. $\frac{4x-8}{|x-2|} = x; [\pm 4]$

26. $|x| + x^3 = 0; [-1; 0]$

27. $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{x^2 + 2x + 1} = 6 - x; [-4; 2]$

Nerovnice

28. $|x - 2| < 3; (-\infty; \frac{4}{3})$

29. $|5x - 7| > 10x - 13; (-\infty; -\frac{5}{6})$

30. $3|x + 1| - |3x + 2| < 0; (-\infty; -\frac{5}{6} >$

31. $|x| \leq |x - 1| + \frac{1}{3}; (-\infty; \frac{2}{3} >$

32. $|x| + |2x - 1| < x; \emptyset$

33. $|3x + 1| - |x - 2| + 1 > 0; (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$

34. $|x + 2| - 2|2x + 4| \leq |3x - 1|; R$

35. $|x| < |x - 1| - |x + 1|; (-\infty; 0)$

36. $|\frac{2x+1}{x-3} + 1| < 1; (-\frac{1}{2}; \frac{5}{4})$

37. $|\frac{5x-3}{4x+7}| \leq 3; (-\infty; -\frac{5}{3}) \cup < -\frac{18}{17}; +\infty)$

38. $|\frac{7x}{2x-7}| < -2; \emptyset$

39. $|\frac{5x+2}{2x-3}| \geq 1; (-\infty; -\frac{5}{3}) \cup < \frac{1}{7}; \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}; \infty)$

40. $x^2 - 5|x| + 6 < 0; (-3; -2) \cup (2; 3)$

41. $|x^2 - 4x| < 5; (-1; 5)$

42. $|x^2 - 2x| < x; (1; 3)$

43. $|x^2 - 2x - 3| < 3x - 3; (2; 5)$

44. $|x - 6| > x^2 - 5x + 9; (1; 3)$

45. $|x - 6| < x^2 - 5x + 9; \mathbb{R} - \langle 1; 3 \rangle$

46. $\frac{|x-2|}{x-2} > 0; (2; \infty)$

47. $|\frac{2}{x-4}| > 1; (2; 4) \cup (4; 6)$

48. $\frac{|2x-1|}{|x-1|} > 2; (\frac{3}{4}; 1) \cup (1; \infty)$

49. $\frac{x^2-5x+6}{|x|+7} < 0; (2; 3)$

50. $\frac{x^2+6x-7}{|x+4|} < 0; (-7; -4) \cup (-4; 1)$

51. $\frac{x^2-7|x|+10}{x^2-6x+9} < 0; (-5; -2) \cup (2; 3) \cup (3; 5)$

52. $\frac{|x-3|}{x^2-5x+6} \geq 2; < \frac{3}{2}; 2)$

53. $|\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}| \leq 1; < 0; \frac{8}{5} > \cup < \frac{5}{2}; \infty)$

54. $|x^2 - 8x| + x^2 > 16; (2; 8);$

55. $|2x + 6| - |x - 1| + 2 < x + 1; \emptyset?$

56. Řešte v \mathbb{R} : $|3 + |1 - x|| \leq 2x; [< 2; \infty)];$

57. $|x^2 - 4x + 3| \leq 2; [\]$

58. Řešte graficky

- $|x - 3| - |x + 1| = 2; [4; 2 - 2x; -4; [0]]$
- $|x - 3| - |x + 1| \leq 2; [< 0; \infty]$
- $|x - 3| - |x + 1| < 1; [(0, \dots; \infty)]$
- $|x - 3| - |x + 1| > -1; [(-\infty; 1, \dots)]$

59. Řešte graficky

- $|x + 2| - |x + 1| = 3; [< -1; \infty)?]$
- $|x + 2| - |x + 1| \leq 3;$
- $|x + 2| - |x + 1| > 3;$
- $|x + 2| - |x + 1| > 0;$

4. Alg. výrazy, zobrazení, pravoúhlý troj. (ev, pv)

- $\sin, \cos, \tan, \cot a = \frac{a}{c} \dots$ v pravoúhlém trojúhelníku ABC
- E.v. o přeponě (výšce) $v^2 = c_a \cdot c_b$; c_a je ta část přepony, která přiléhá ke straně a
- Pythagorovka včetně ukázky důkazu, nad c a oběma odvěsnami vztyčím čtverce, doplním obdélníky ABCD a CXY. α, β zakreslím všude, kde jsou a pomocí vět o souhlasných a střídavých úhlech u rovnoběžek to mám dokázané. Obsah velkého čtverce = obsahu menšího + čtyř stejných pravoúhlých trojúhelníků. $(a + b)^2 = c^2 + 4 \frac{ab}{2}$
- Euklidovka o výšce - dokážu pomocí podobnosti trojúhelníků APC, CPB:
 $\frac{v_c}{c_b} = \frac{c_a}{v_c}; v_c^2 = c_a \cdot c_b$
- Eukl. o odvěsně a, vyjdu z podobnosti trojúhelníků CPB a ACB
 $\frac{c_a}{a} = \frac{a}{c}; a^2 = c \cdot c_a$
- Eukl. o odvěsně b, vyjdu z podobností APC a ACB
 $\frac{c_b}{b} = \frac{b}{c}; b^2 = c \cdot c_b$

Dám dohromady obě platné věty o odvěsnách a sečtu dané rovnice (ekvivalentní úprava)

$$c \cdot c_a = a^2$$

$$c \cdot c_b = b^2$$

$c \cdot (c_a + c_b) = a^2 + b^2$ a mám další důkaz Pythagorovky, tentokrát algebraicky. :-)

1. Dopačítejte a, b, c_a, c_b v pravoúhlém trojúhelníku, $c = 13, v_c = 6$; [.....]
2. Dopačítejte a, b, c_a, c_b v pravoúhlém trojúhelníku, $v_c = 5; c = 14$
3. Dopačítejte b, c, c_a, v_c v pravoúhlém trojúhelníku, $a = 5; c_b = 4$
4. Dopačítejte a, c, c_b, v_c v pravoúhlém trojúhelníku; $b = 4; c_a = 5$
5. Dopačítejte b, c, c_a, v_c v pravoúhlém trojúhelníku $a = 6; c_b = 3$
6. Dopačítejte a, c, c_a, c_b, v_c v pravoúhlém trojúhelníku $b = 5; c_a = 4$
7. Pomocí Pythagorovy věty nejprve početně a potom i graficky vyjádřete $\sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{5}; \sqrt{6}; \sqrt{7}; \sqrt{8}$ (Pravoúhlý rovnoramenný o odvěsnách délky 1 a pak přepony)
8. Užitím Thaletovy a Eukl. věty o výšce vyjádřete a znázorněte $\sqrt{12}$
9. Užitím Thaletovy a Eukl. věty o výšce vyjádřete a znázorněte $\sqrt{15}$
10. Užitím Thaletovy a Eukl. věty o výšce vyjádřete a znázorněte $\sqrt{20}$
11. Užitím Thaletovy a Eukl. věty o výšce vyjádřete a znázorněte $\sqrt{26}$
12. Vyjádřete a graficky znázorněte $\sqrt{29}$. Užitím Thaletovky pro $\sqrt{28}$ a potom Pythagorovky o druhé odvěsně délky 1 to mám :-)

13. Vyjádřete a graficky znázorněte $\sqrt{19}$. To už se může člověk v pohodě vdávat :-)
Užitím Thaletovky pro $\sqrt{18}$ a potom Pythagorovky o druhé odvěsně délky 1 to mám :-).

14. Zlatý řez úsečky $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$

$$0 = \left(x - \frac{a+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{-a+\sqrt{5}}{2}\right)$$

15. Vyznačte na 2m dlouhé tyčce bod zlatého řezu, kde poměr delšího úseku ku kratšímu je stejný jako poměr celé délky tyčky ku jejímu většímu úseku. Kolik je tento poměr?
 $-1 + \sqrt{5} \approx 1,236$

16. Vyznačte na 1,8m dlouhé tyčce bod zlatého řezu, kde poměr delšího úseku ku kratšímu je stejný jako poměr celé délky tyčky ku jejímu většímu úseku. Kolik je tento poměr?

17. Vyznačte na 3m dlouhé tyčce bod zlatého řezu, kde poměr delšího úseku ku kratšímu je stejný jako poměr celé délky tyčky ku jejímu většímu úseku. Kolik je tento poměr?

18. Vyznačte na 1m dlouhé tyčce bod zlatého řezu, kde poměr delšího úseku ku kratšímu je stejný jako poměr celé délky tyčky ku jejímu většímu úseku. Kolik je tento poměr?

19. Jsou dány úsečky a, b $a > b$. Sestrojte úsečku x, pro kterou platí:

1. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$; Pythagorovka
2. $x = \sqrt{a^2 - b^2}$; Pythagorovka
3. $x = a \cdot \sqrt{2}$; úhlopříčka čtverce a, Pythagorovka
4. $x = a \cdot \sqrt{3}$ dvojnásobná výška rovnostranného trojúhelníku o straně, $2 \times$ Pythagorovka - nejdřív $a\sqrt{2}$ a pak ještě jedna odvěsna a
5. $x = \sqrt{ab}$; Euklidovka
6. $x = \sqrt{\frac{ab}{2}}$; Euklidovka
7. $x = \frac{a^2}{b}$; podobnost $\frac{b}{a} = \frac{a}{x}$ POZOR TOHLE jim pořádně nakresli!!!!!!!!!!!!
8. $x = \frac{ab}{a+b}$; podobnost $\frac{x}{a} = \frac{b}{a+b}$ POZOR TOHLE jim pořádně nakresli!!!!!!!!!!!!

Shodná zobrazení

Klasifikace, ukázat, jak to vypadá

- středová souměrnost
- posunutí ve směru
- otočení (pozor, bývají dva směry)

20. Jsou dány dvě různoběžky p, q a bod M, který neleží ani na jedné z nich. Sestrojte úsečku XY tak, aby platilo $X \in p$; $Y \in q$ a bod M je střed úsečky XY. [Středová soum. podle M]

21. Jsou dány dvě různoběžky p, q a kružnice k. Sestrojte úsečku XY tak, aby platilo $X \in k$, $Y \in p$, úsečka XY je kolmá na přímkou q a střed úsečky XY leží na přímce q. Zvolte vzájemnou polohu přímek a kružnice, aby úloha měla 2, 1 a 0 řešení. [Osová souměrnost podle přímky q]

22. Jsou dány dvě různoběžky p, q a bod M, který neleží ani na jedné z nich. Sestrojte úsečku XY tak, aby platilo $X \in p$, $Y \in q$; $\sphericalangle XMY = 60^\circ$, $|MX| = |MY|$. Zvolte vzájemnou polohu

přímek přímek, aby úloha měla 2, 1, 0 řešení. Má úloha nekonečně mnoho řešení? [otočení $\pm 60^\circ$ v bodě M]

23. Je dána kružnice k a přímka p , které nemají společný bod. Dále je dána úsečka AB . Sestrojte úsečku XY tak, aby platilo $X \in k; Y \in p$ úsečka XY je rovnoběžná s AB a je taky stejně dlouhá jako AB . Zvolte vzájemnou polohu k a p , aby úloha měla 4, 3, 2, 1, 0 řešení. [posunutí ve směru AB nebo BA]

24. Je dán čtverec $KLMN$, $|KL| = 6$. Vně čtverce zvolte bod A , aby platilo $|AL|=4$, $|AM|=3$. Sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky ABC , aby vrcholy B, C ležely na obvodu čtverce $KLMN$. [otočení $\pm 60^\circ$ v bodě A]

25. Kružnice $k_1(O_1; 5); k_2(O_2; 3), |O_1O_2| = 4$ se protínají ve dvou bodech. Označte C jeden z těchto průsečíků. Sestrojte všechny rovnoramenné trojúhelníky ABC se základnou AB tak, aby platilo $A \in k_1 \wedge B \in k_2 \wedge |\sphericalangle ACB| = 120^\circ$. [otočení $C \pm 120^\circ$]

26. Kružnice $k_1(O_1; 4); k_2(O_2; 2, 5), |O_1O_2| = 3$ se protínají ve dvou bodech. Označte T jeden z těchto průsečíků. Sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky ABC , aby platilo $A \in k_1; B \in k_2$ a bod t byl těžištěm trojúhelníku ABC . [otočení $\pm 120^\circ$ se středem T]

27. VIP Je dána kružnice $k(O, 4)$ a bod A . Sestrojte všechny tětivy kružnice k , které mají délku 6 a pro které platí, že přímka XY prochází daným bodem A .

- $|OA|=3$
- $|OA|=5$ UKÁZAT!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

[sestrojím libovolnou tětivu KL o délce 6, její průsečík s $ch(O,3)$ mám bod A' a v otočení $A'OA$ dostanu i XY jako obraz KL]

Stejnolehlost (podobná zobrazení), ukázat na koeficientu, co když $k=-1$? :-)

Babka a diskotéka !!!!!!! :-)

28. Je dán trojúhelník ABC ($a=4, b=3, c=5$). Vně trojúhelníku ABC sestrojte bod S tak, aby platilo $|AS|=3, |CS|=4$. Narýsujte obraz trojúhelníku ABC ve stejnolehlosti se středem S a koeficientem

- $k = \frac{3}{2}$
- $k = \frac{1}{3}$
- $k = -\frac{1}{2}$
- $k = -1$

29. Je dán čtverec $ABCD$ o straně $a=4$. S je střed čtverce. Nakreslete obraz čtverce ve stejnolehlosti se středem S a koeficienty:

- $k = \frac{1}{2}$
- $k = 2$
- $k = -\frac{3}{4}$
- $k = -2$

30. Narýsujte středy stejnolehlostí dvou kružnic, je-li dáno:

1. $k_1(O, 3); k_2(O_2, 1); |O_1O_2| = 6$
2. $k_1(O, 3); k_2(O_2, 2); |O_1O_2| = 3, 5$

3. $k_1(O, 3); k_2(O_2, 2); |O_1O_2| = 1$
4. $k_1(O, 3); k_2(O_2, 3); |O_1O_2| = 6$ [najdu střed stejnohlosti dvou libovolných rovnoběžných průměrů kružnic]

31. Dány dvě kružnice $k_1(O_1, 4); k_2(O_2, 1); |O_1O_2| = 7$. Narýsujte středy stejnohlosti daných kružnic. Označte S_1 vnější střed stejnohlosti, S_2 vnitřní. Určete koeficienty stejnohlosti:

- střed stejnohlosti je S_1 a stejnohlost zobrazuje k_1 na k_2
- střed stejnohlosti je S_1 a stejnohlost zobrazuje k_2 na k_1
- střed stejnohlosti je S_2 a stejnohlost zobrazuje k_1 na k_2
- střed stejnohlosti je S_2 a stejnohlost zobrazuje k_2 na $k_1; [\frac{1}{4}; 4; -\frac{1}{4}; -4]$

32. Narýsujte společné tečny daných dvou kružnic:

1. $k_1(O, 3, 5); k_2(O_2, 1, 5); |O_1O_2| = 6, 5$
2. $k_1(O, 3, 5); k_2(O_2, 1, 5); |O_1O_2| = 5$

33. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, znáte-li:

1. $a : b = 4 : 5; \gamma = 60^\circ; v_c = 3$
2. $b : c = 7 : 6; a = 45^\circ; v_c = 3$
3. $a : b : c = 7 : 3 : 5; v_c = 4$ [pomocný $A'B'C'$ jeho výška v_c a koeficient $k = \dots$:-)]

34. Ještě jeden na otočení:

Máte dvě soustředné kružnice $k_1(S; 3); k_2(S; 5)$ a bod C, $|SC| = 3, 8$ sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky s vrcholy C, $A \in k_1; B \in k_2$

5. Obecný trojúhelník, početně a graficky

- SINOVKO $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$
- KOSINOVKA $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ což je kosinovka, když je $\gamma = 90^\circ$?
- Obsahy trojúhelníku
 $S = \frac{a \cdot v_a}{2}$
 $S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$ a jeho cyklická záměna
 $S = \sqrt{s \cdot (s - a)(s - b)(s - c)}$; $s = \frac{a+b+c}{2}$ Herónův
- kružnice opsaná = OSY STRAN, kružnice vepsaná = osy úhlů

Určete zbývající strany a úhly v trojúhelníku ABC:

1. $a = 48^\circ 50'$; $\beta = 107^\circ 16'$; $c = 135,3$; $[23^\circ 54'$; $251,4$; $318,9]$
 2. $a = 50^\circ$; $\beta = 100^\circ$; $c = 100$
 3. $a = 134,5$; $b = 111,2$; $\gamma = 54^\circ 12'$; $[113,8$; $73^\circ 23'$; $52^\circ 25'$]
 4. $a = 6,25$; $b = 11,5$; $c = 7,35$; $[29^\circ 30'$; $115^\circ 10'$; $35^\circ 20'$]
 5. $a = 746,4$; $b = 1854$; $\beta = 145^\circ 07'$; $[13^\circ 19'$; $21^\circ 34'$; $1192]$
 6. $a = 13,6$; $b = 22,5$; $\alpha = 21^\circ 38'$; $[37^\circ 35'$; $120^\circ 47'$; $31,7]$
 7. $b = 6,5$; $c = 3,5$; $\gamma = 55^\circ$; $[\emptyset]$
 8. Určete zbývající strany a úhly v trojúhelníku ABC
 1. $S = 131m^2$; $c = 31,7$; $\beta = 37^\circ 35'$; $[13,6$; $22,5$; $21^\circ 38'$; $120^\circ 47'$]
 2. $S = 16000$; $a = 250$; $b = 320$; $[137; 48^\circ; 108^\circ; 24^\circ] \cup [558; 10,5^\circ; 13,5^\circ; 156^\circ]$
 9. Obsah rovnoběžníku ABCD? $|AB| = 57$; $|AC| = 66$; $|\angle ABC| = 57^\circ 40'$; $[3640]$
 10. Urči velikosti zbývajících stran a úhlů v trojúhelníku ABC: $c = 25$; $a = 32$; $s = 160$
- Obvodový a středový úhel (jednod. konstrukce), Thaletovka - speciální případ středového a obvodového úhlu
11. Sestrojte troj. ABC, je-li dáno $c = 7$; $t_c = 4$; $\gamma = 120^\circ$; počty řešení?
 12. Sestrojte troj. ABC, je-li dáno: $c = 8$; $v_c = 6$; $\gamma = 65^\circ$;
 13. Sestrojte a výpočtem strany c ověřte trojúhelník ABC, $a = 6$; $b = 5$; $\alpha = 70^\circ$.
 14. Sestrojte trojúhelník ABC $\alpha = 30^\circ$; $a = 5$; $v_c = 3$.
 15. Sestrojte troj. ABC, $a =$; $v_c = 4$; $\alpha = 80^\circ$.
 16. Sestrojte trojúhelník ABC $a = 5$; $b = 4$; $\gamma = 110^\circ$; vepište mu kružnici ρ .

17. Sestrojte trojúhelník ABC, $a = 3; c = 6; \beta = 40^\circ$; opište mu kružnici Ω .
18. Sestrojte trojúhelník ABC, $t_a = 9; t_b = 12, t_c = 6$.
19. Ještě jeden; $t_a = 7; t_b = 8; t_c = 9$. Možná nevyjde :-)
20. Sestrojte trojúhelník ABC, $c = 7; v_c = 4; \gamma = 110^\circ$; vepište a opište mu kružnici.
21. Určte velikosti zbývajících stran a úhlů v trojúhelníku ABC, je-li $c = 25; a = 32; S = 160$.
22. Sestroj troj. ABC, je-li $c = 4, v_c = 3; \gamma = 70^\circ$.
23. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno $c = 10; \gamma = 60^\circ; v_c = 2$.
24. Sestrojte troj. ABC, je-li dáno $c = 10; \gamma = 70^\circ; t_c = 6$.
25. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, znáte-li
1. $b = 8; t_b = 2, 5; \gamma = 30^\circ$; [přes AC]
 2. $c = 5; t_a = 6; t_b = 3$; [těžiště]
 3. $t_c = 4; t_a = 6; v_c = 3, 5$; [pata výšky z C, těžiště]
 4. $c = 8; v_c = 1, 5; \gamma = 120^\circ$; [obvodový]
 5. $v_c = 4, a = 60^\circ; \beta = 45^\circ$; [2× obvodový]
26. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC. Kružnice opsaná $k(S, r)$ trojúhelníku ABC.
1. $r = 4; v_c = 2; c = 7, 5$; [4 řešení]
 2. $r = 4; v_a = 3; c = 7$; [Thaletovka nad AB, 2 řešení]
 3. $r = 4; v_a = 5; \gamma = 45^\circ$; [pomocný troj nebo obvod'ák?]
27. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC. Kružnice vepsaná $k(S, \rho)$ trojúhelníku ABC.
1. $\rho = 1, 5; c = 8; a = 45^\circ$; [AB, úhel, S ve vzd 1,5 nebo půlka a , Thal. nad BS]
 2. $\rho = 1, 5; v_c = 4; \beta = 60^\circ$; [úhel beta, rovnoběžka vzd=4 a Thaletovka CS nebo pomocný a potom Thaletovka CS?]

Exponenciální a logaritmická funkce

Funkce

- předpis, který všem x z $D(f)$ přiřadí nejvýše jedno reálné y (kuchařsky = jedno x , jedno y ... to je funkce)
- rostoucí, neklesající funkce
- klesající, nerostoucí funkce
- ryze monotónní, monotónní funkce
- shora, zdola omezená funkce, omezená funkce; supremum, infimum, max, min.
- OBRÁZKY, OBRÁZKY, OBRÁZKY :-)
- definice prosté funkce; $\forall x_1 \neq x_2; f(x_1) \neq f(x_2)$. Příklad. Monotónní, ryze, rostoucí, klesající
- funkce je prostá právě tehdy, je-li ryze monotónní
- pouze k prosté funkci (na daném intervalu) existuje funkce inverzní

Exponenciální funkce

- Exponenciála $f(x) = a^x; a > 0; a \neq 1$ pročpak by $a = 1$? Protože 1^x není prostá a selhalo by hledání inverzní (logaritmu) - neexistoval by
- grafy a^x pro $a \in (0; 1)$ resp. $a \in (1; +\infty)$. $D(f), H(f),$ monotonie? A co funkce inverzní?

1. Pomocí grafu 10^x sestrojte

1. 10^{x-1}
2. 10^{x+1}
3. $10^x - 3$
4. 10^{-x}
5. $10^{|x|}$

2. Kolik je $2^0; 1^0; 0^0$?

3. Co lze říci o m, n ?

1. $(\frac{3}{4})^m < (\frac{3}{4})^n$
2. $2, 5^m < 2, 5^n$
3. $0, 7^m > 0, 7^n$

4. Který ze vztahů $0 < a < 1; a > 1$ platí?

1. $a^{\frac{3}{5}} < a^{\frac{4}{5}}$;
2. $a^{\frac{2}{7}} > a^{\frac{5}{7}}$
3. $a^{-\frac{7}{8}} > a^{\frac{9}{8}}$

5. Určete funkci inverzní k $f: 10^{x+1}; D(f^{-1}); H(f^{-1});$ její předpis a vypočítejte $f(0); f^{-1}(10);$
 $[\log x - 1; D(f^{-1}) = (0; \infty); H(f^{-1}) = \mathbb{R}; f(0) = 10; f^{-1}(10) = 0]$

6. Určte funkci inverzní k $f(x) = 0^x$; cha cha

7. Určete funkci inverzní k $f(x) = e^x; e = 2, 712... = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x$ a ještě a hlavně $y = a^x!!!$
LEPŠÍ ZAČÍT $10^x!!!$

Logaritmus

- fce inverzní k exponenciále o stejném základu
- $\log_a r = v \Leftrightarrow a^v = r; a \in (0; 1) \cup (1; \infty)$ co je a v exponenciále? r, v?
- $D(f), H(f)$ a problémy
- graf $y = \log_a r; \text{pro } a \in (0; 1)$ resp. $a \in (1; \infty)$.
- co kdyby $a=1$? ... bylo by hrozně moc stejných v pro různá r a to znamená, že byl $\log_a r$ nebyl funkcí! proto $\log_1 r$ nemá smysl
- $f(x) = \ln x = \log_e x$

8. Načrtněte grafy funkcí pomocí grafu $\log_2 x$ a $\log_{\frac{1}{2}} x$

- $\log_2 x + 1$ a ještě pro $\log_{\frac{1}{2}} x, \dots$
- $\log_2(x - 1)$
- $\log_2|x - 1|$
- $|\log_2(x - 1)|$
- $\log_2|x + 1|$

Grafy, urèování definièních oborù (u logaritmických funkcí)

9. Určete $D(f); y = \log_2(x^2 + 24x - 15)$

10. Určete $D(f); y = \log \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = \log \frac{x^2-x-2}{x-1} !!!$

11. Určete $D(f); y = \log(10 - x)$

12. Určete $D(f); y = \frac{\log(x^2-x-6)}{\log(20-x)}$

13. Najděte předpis, $D(f^{-1}), H(f^{-1})$ funkce inverzní k $f: y = \log x + 1$; určete $f(10); f^{-1}(2)$; $[y = 10^{x-1}; \dots]$

14. Najděte předpis $D(f^{-1}), H(f^{-1})$ funkce inverzní k $f: y = \log(x - 1) + 1$; určete $f(11); f^{-1}(2)$;

15. Najděte předpis $D(f^{-1}), H(f^{-1})$ funkce inverzní k $f: y = \log(x + 1) - 1$; určete $f(9); f^{-1}(0)$;

16. Načrtněte graf $y = 10^x; \log x$

17. Načrtněte graf $y = (\frac{1}{2})^x; \log_{\frac{1}{2}} x$

18. Určete definièní obor $y = \frac{\log(\sqrt{x^2-2x-4}-2)}{\log_{x-2}}$; $[x > 0 \cap x^2 - 2x - 4 \geq 0 \cap \sqrt{x^2 - 2x - 4} - 2 > 0]$

19. Načrtněte grafy funkcí (určete $D(f), H(f)$; průseèíky se souřadnicovými osami):

1. $y = 2^x - 4$;
2. $y = 2^{x+1} - 4$;
3. $y = -(2^{x+1} - 4)$;
4. $y = |2^{x+1} - 4|$;

$$5. y = 2^{|x+1|} - 4;$$

$$6. y = 2^{|x|+1} - 4;$$

20. Načrtněte grafy funkcí (určete D(f), H(f); průsečíky se souřadnicovými osami):

$$1. y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} - 1;$$

$$2. y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} + 4;$$

$$3. y = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} + 4;$$

21. Načrtněte grafy funkcí:

$$1. y = 2^{-x};$$

$$2. y = 2^{-x+1};$$

$$3. y = 3 \cdot 2^x;$$

$$4. y = 2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x; [\text{sudá}]$$

$$5. y = e^x;$$

$$6. y = 10^x;$$

22. Určete definiční obory funkcí:

$$1. y = \log_3(x+6); [(-6; \infty)]$$

$$2. y = \log(x^2 - 4); [(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)]$$

$$3. y = \sqrt{\log(x+3)}; [(-2; \infty)]$$

$$4. y = \frac{1}{\log_{x-1}}; [(0; \infty) - \{10\}]$$

$$5. y = \log \frac{x}{2^{x-1}}; [(-\infty; 0) \cup (\frac{1}{2}; \infty)]$$

$$6. y = \frac{1}{\log_2(x+7)-1}; [(-7; \infty) - \{-5\}]$$

23. Načrtněte grafy funkcí (určete D(f), H(f); průsečíky se souřadnicovými osami):

$$1. y = \log_2(x+4)$$

$$2. y = \log_2(x+4) - 1$$

$$3. y = |\log_2(x+4) - 1|$$

$$4. y = |\log_2(x+4)| - 1$$

$$5. y = \log_2|x+4| - 1$$

$$6. y = \log_2(|x|+4) - 1$$

24. Načrtněte grafy funkcí:

$$1. y = \log_{\frac{1}{2}}x + 2$$

$$2. y = 3 \log_{\frac{1}{2}}x + 2$$

$$3. y = 3 \log_{\frac{1}{2}}(x+2)$$

$$4. y = \ln x$$

$$5. y = \log x$$

$$6. y = \log_2x + \log_{\frac{1}{2}}x; \text{kladná poloosa } x \text{ bez } 0$$

$$7. y = \log_2x - \log_{\frac{1}{2}}x; \text{agresivní log o } a > 1$$

25. Najděte reálná x, pro která platí:

$$1. \log_{1,5}x < \log_{1,5}5; [(0; 5)]$$

$$2. \log_{0,7}(x+1) \leq \log_{0,7}\frac{1}{3}; [(-\frac{2}{3}; \infty)]$$

použijte graf vhodné logaritmické funkce.

Pravidla počítání s logaritmy, dokázat aspoň nějaké?

- $\log ab = \log a + \log b$
- $\log r^s = s \log r$
- $\log \sqrt[n]{r} = \frac{1}{n} \log r$
- $\log \frac{r}{s} = \log r - \log s$
- a především $\log_a r = \frac{\log r}{\log a}$

Řešte v R:

$$1. 3^{2x+1} + 3^{2x} - 3^{2x-2} = 105$$

$$2. 3^x(19 - 3^x) = 90$$

$$3. \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 2x) + 3 \geq 0$$

$$4. \log(54 - x^3) = 3 \log x; [3]$$

$$5. \log x^2 + \log x^3 + \log x^4 + \log x^5 = 6; [2, 6827]$$

$$6. \log_2 x - \log_2 \sqrt{x} + \log_1 \frac{1}{x} = -1; [4]$$

$$7. \log 2x - \log \sqrt{x} + \log x^2 = \log 2 - \log \frac{1}{x^3} + 1; [...]$$

$$8. \log(x - 9) + 2 \log \sqrt{2x - 1} = 2; [15]$$

$$9. \log \sqrt{x - 5} + \log \sqrt{2x - 3} + 1 = \log 30; [6]$$

$$10. \log \sqrt{2x + 1} + \frac{1}{2} \log(x - 3) = 1 + \log 0, 3; [4]$$

$$11. \frac{3 + \log x}{2 - \log x} = 4; [10]$$

$$12. \frac{\log(x^2 + 7)}{\log(x + 7)} = 2; [-3]$$

$$13. \frac{\log(2x - 5)}{\log(x^2 - 8)} = \frac{1}{2}; \left[\frac{11}{3}; 3 \right]$$

$$14. \log x + \frac{1}{\log y} = 2; [10]$$

$$15. 4 - \log x = 3 \sqrt{\log x}; [10]$$

$$16. \log \log \log x = 0; [10^{10}]$$

$$17. \log_5(2x + 9) + \log_5(4 - 3x) = 2 + \log_5(x + 4); [-2]$$

$$18. \log_{12}(2x + 4) - \log_{12}(x - 3) = \log_{12} 7; [5]$$

$$19. \log_{\frac{1}{3}}(x + 10) + \log_{\frac{1}{3}}(7 - 2x) = -4; [-5; 1]$$

20. $\log_6 \sqrt{x-2} + \frac{1}{2} \log_6(x-11) = 1; [14]$

21. $\log_3[2 + 2 \log_4(2x-3)] = 1; [2, 5]$

22. $\log_3(4 \cdot 3^x - 1) = 2x + 1; [-1; 0]$

23. $\frac{\log_2(9-2^x)}{3-x} = 1; [0]$

24. $\log_2(4 \cdot 3^x - 6) - \log_2(9^x - 6) = 1; [1]$

25. $\log_4(2 \cdot 4^{x-2} - 1) + 4 = 2x; [2]$

26. $x^{\log x - 2} = 1000; [\frac{1}{10}; 1000]$

27. $x^{2 \log_x 10} = 10^x; [10]$

28. $x^{\frac{3}{8} \log^3 x - \frac{3}{4} \log x} = 1000; [0, 01; 100]$

29. $x^{3+2 \log x} = 100x^{2+\log x}; [0, 01; 10]$

30. $5^{\log x} - 3^{\log x - 1} = 3^{\log x + 1} - 5^{\log x} - 1; [100]$

31. $\log_4 \log_3 \log_2 x = \frac{1}{2}; [512]$

32. $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7; [16]$

33. $\log_5 x + \log_{25} x = \log_{\frac{1}{5}} \sqrt{3}; [\frac{1}{\sqrt[3]{3}}]$

34. $\log_3 x - 2 \log_{\frac{1}{3}} x = 6; [9]$

35. $\log_{x-1} 3 = 2; [1 + \sqrt{3}]$

36. $\log_{5-x}(x^2 - 2x + 65) = 2; [-5]$

37. $\log x^2 - \log_4 x + \frac{7}{6} = 0; [2^{-\frac{2}{3}}; 8]$

38. $\log_x 4 + \log_{x^2} 64 = 5; [2]$

Exponenciálky

39. $3^{x+1} + 9^x = 108; [2]$

40. $\frac{1}{2} 2^{x-1} = 4^{x-1}; [0]$

41. $3^{x+2} + 9^{x+1} - 810 = 0; [2]$

42. $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}; [-1]$

43. $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}; [1, 5]$

44. $2^{3x} \cdot 7^{x-2} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}; [-1]$

45. $2^{3x-1} = 3^{2x-1}; [-15, 213]$

46. $2^x \cdot 3^{3x} = 4^{x-1}; [-0, 53264]$

47. $3^x + 2 = 3^{x+2}; [-1, 2619]$

Nerovnice

48. $3^{x+4} < 3^{1-x}; [(-\infty; -\frac{3}{2})]$

49. $(\frac{1}{7})^{3x} < 1; (0; +\infty)$

50. $(\frac{2}{3})^{x^2} > (\sqrt{\frac{3}{2}})^x; (-\frac{1}{2}; 0)$

51. $\log_2(x+2) > 3; (6; +\infty)$

52. $\log_2(x^2 - 10) > \log_2 1; (-\infty; -\sqrt{11}) \cup (\sqrt{11}; \infty)$

53. $\frac{\log(3x+1)}{\log 2x} > 0; (\frac{1}{2}; \infty)$

54. $\log(x-4) + \log(x-2) > 1; (3 + \sqrt{11}; \infty)$

55. $\frac{\log(35-x^3)}{\log(5-x)} > 3; (2; 3)$

56. $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 8x) + 2 \geq 0; < -1; 6) \cup (8; 9 >$

57. $\log_4 x < 8; (0; 1) \cup (\sqrt{\sqrt{2}}; \infty)$

58. $\log_{2x-3} x > 1; (2; 3)$

59. $\log_{\frac{x-1}{x+5}} 0,3 > 0; (1; \infty)$

60. $\log_{x-3}(x-1) < 2; (3; 4) \cup (5; \infty)$ Obě větévky $x > 4$ resp $x \in (3; 4)$

61. $\log_{\frac{1}{2}}(x-2) < 3$

62. $\log_{\frac{2}{3}}(x^2 - 4x) \geq 2$

63. $\log_3 \frac{x+1}{x+3} < \log_3 \frac{x+1}{x}; [(0; \infty)?]$

64. $6^{x+1} + 6^{1-x} = 13;$

65. $3^x - 5^{x+1} + 3^{x+2} = 5^{x+2} - 3^{x+1};$

$$66. \log(2x+9) - 2 \log x + \log(x-4) = 2 - \log 50; [36?]$$

$$67. x^{\log x} + 10x^{-\log x} = 11; [0, 1; 1; 10]$$

8. Goniometrické funkce

- stupňová a oblouková míra; převodní vztah. Co je 1rad = cca 57°. Orientovaný úhel
- orientovaný úhel, základní velikost úhlu
- jednotková kružnice, její rozbalení ven; $\cos x$, $\sin x$; kvadranty, perioda, $\tan x$, $\cot x$, $D(f)$; $H(f)$
- Tabulka vlastností goniometrických funkcí: definiční obor, obor hodnot, sudost, perioda, omezenost, maximum, minimum, kde roste, kde klesá, nulové body
- Tabulka “důležitých hodnot” goniometrických funkcí

- odvození $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; $\tan x$; $\cot x$;
- vzorce: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$;
 $\tan x \cdot \cot x = 1$; $x \neq \frac{k\pi}{2}$
 $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$
 $\cos(x \pm y) = \cos x \sin y \mp \sin x \cos y$
 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
 $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$\sin a + \sin \beta = 2 \sin \frac{a+\beta}{2} \cos \frac{a-\beta}{2}$$

$$\sin a - \sin \beta = 2 \cos \frac{a+\beta}{2} \sin \frac{a-\beta}{2}$$

$$\cos a + \cos \beta = 2 \cos \frac{a+\beta}{2} \cos \frac{a-\beta}{2}$$

$$\cos a - \cos \beta = -2 \sin \frac{a+\beta}{2} \sin \frac{a-\beta}{2}$$

- pozor na podmínky u $\tan x$, $\cot g$; propak? kvůli definici

1. Načrtněte graf funkce $y = \frac{1}{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}) + 1$; $v < -\pi$; $2\pi >$

2. Načrtněte graf funkce $y = 2 \cos(x + \frac{\pi}{4}) - 1$; $v < -\pi$; $2\pi >$

3. Načrtněte graf funkce $y = \tan(x - \frac{\pi}{3})$; „okolo počátku“

4. Načrtněte graf funkce $y = \tan(x + \frac{\pi}{4})$; „okolo počátku“

5. Načrtněte graf funkce $y = \cot(x - \frac{\pi}{3})$; „okolo počátku“

6. Načrtněte graf funkce $y = \cot(x + \frac{\pi}{3})$; „okolo počátku“

7. Načrtněte graf funkce $y = 2 - \sin x$; $v < -\pi$; $2\pi >$

8. Načrtněte graf funkce $y = |\cos x|$; $v < -\pi$; $2\pi >$

Zjednodušte, případně stanovte podmínky (kde je třeba):

9. $\sin^2 x + \cos^2 x + \operatorname{tg}^2 x$; $[1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi]$

10. $1 - \sin^2 x + \cot^2 x \cdot \sin^2 x$; $[2 \cos^2 x; x \neq k\pi]$

11. $\frac{1}{1+\sin x} + \frac{1}{1-\sin x}; \left[\frac{2}{\cos^2 x}; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right]$

12. $\frac{1}{1+\tan^2 x} + \frac{1}{1+\cot^2 x}; \left[1; x \neq \frac{k\pi}{2} \right]$

13. $\frac{\tan x \cdot \cos^2 x}{1-\cos^2 x}; [\cot x; x \neq k\pi]$

Finty ala Harbich

- $\cos 0^0 = 1$
- $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
- Vzorce pro součet/rozdíl goniom.funkcí (kde je najdu)

14. $\cos\left(\frac{1}{6}\pi - x\right) - \cos\left(\frac{1}{6}\pi + x\right); [\sin x]$

15. $\cos 2x + \sin 2x \cdot \tan x; \left[1; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right]$

16. VIP $\frac{1-\cos 2x+\sin 2x}{1+\cos 2x+\sin 2x}; \left[\tan x; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi \right]$

Zjednodušte

17. $\sin^2 x \cdot \cos x + \cos^3 x; [\cos x]$

18. $\sin^4 x + \cos^4 x + \cos^2 x; [\sin^2 x]$

19. $(1 + \sin x)(1 - \sin x); [\cos^2 x]$

20. $\frac{1}{\cos^2 x} - 1; \left[\tan^2 x; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right]$

21. $\frac{1-\sin^2 x}{1-\cos^2 x}; [\cot^2 x; x \neq \dots]$

22. $\sin x + \cos x \cdot \tan x; [2 \sin x; x \neq \dots]$

23. Chytáček $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2; [2]$ pozor na správné umocnění

24. $\frac{\cos^2 2x - 1}{\sin^2 2x - 1}; \left[\tan^2 2x; x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \right]$

Rozložte na součin

25. $1 + \cos x = \left[\cos 0^0 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} \right]$

26. $1 - \cos x; \left[2 \sin^2 \frac{x}{2} \right]$

27. !!! $\sin x + \cos x; \left[\text{co je sinus?}; \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right]$

28. $1 + \sin x - \cos 2x; \left[4 \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right) \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right) \right]$

29. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x; \left[4 \cos^2 x \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \right]$

30. $\frac{1-\tan x}{1+\tan x}; \left[\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \right]$

Určete podmínky a upravte

31. VIP $3 \cos^2 x - 4 \sin x \cos x - \sin^2 x - 1; [2\sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4})]$

32. $\frac{1+\sin 2x}{(\sin x + \cos x)^2}; [1]$

33. $\frac{\tan x + \sin x}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}; [\tan x]$

34. $\frac{\sin 3x + \sin 5x + \sin 7x}{\cos 3x + \cos 5x + \cos 7x}; [\text{maso nebo 1. a 3. sectu}; \tan 5x]$

35. $\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x} + \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}; [2 \tan x]$

36. $\frac{\sin x + \sin 2x}{1 + \cos x + \cos 2x} \cdot \frac{\cos 3x - \cos x}{\sin 3x + \sin x}; [-1]$

37. Vypočti $\sin 2x$, je-li $\tan x = -2$ a $x \in (\frac{\pi}{2}; \pi); [-\frac{4}{5}]$

38. Sestroj graf funkce $f: y = 2 \cos(x - \frac{\pi}{4}) - 1; D(f) = \langle -2\pi; 2\pi \rangle$

39. Urči podmínky daného výrazu, výraz uprav: $\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x} + \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}; [2 \tan x; x \neq \frac{k\pi}{2}]$

40. Dokažte $\frac{\sin^3 x + \sin 3x}{\cos 3x - \cos^3 x} = -\cot x; [\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x; \dots]$

41. Zjednodušte $\frac{\sin x - \sin 3x + \sin 5x}{\cos x - \cos 3x + \cos 5x}; [1 + 3 \cdot \text{secti}; \tan 3x; x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}]$

9. Goniometrické (ne) rovnice

- vzorce, hodnoty s periodami

Řešte v R:

$$1. \cot x = 0; \left[\frac{\pi}{2} + k\pi \right]$$

$$2. \sin 2x = \frac{1}{2}; \left[\frac{\pi}{12} + k\pi; \frac{5\pi}{12} + k\pi \right]$$

$$3. \sin 2x = -\frac{1}{2}; \left[\frac{7\pi}{12} + k\pi; \frac{11\pi}{12} + k\pi \right]$$

$$4. \tan 3x = -1; \left[\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3} \right]$$

$$5. \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \left[-\frac{\pi}{3} + k\pi; -\frac{\pi}{2} + k\pi \right]$$

$$6. \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1; \left[-\frac{3\pi}{8} + k\pi \right]$$

$$7. \cot\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}; \left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi \right]$$

$$8. \frac{2}{\sqrt{3}} \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{3}; \left[\pi + 2k\pi \right]$$

$$9. \sin^2 x + 2 \sin x - 3 = 0; \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right]$$

$$10. \sin^2 x + 5 \sin x + 4 = 0; \left[\frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right]$$

$$11. \cos x(2 \cos x + 1) = 1; \left[\pi; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \right]$$

$$12. \cos x(2 \cos x + 1) = -1; \left[\frac{\pi}{3}; \pi; \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \right]$$

$$13. \sqrt{3} \tan^2 x + 2 \tan x - \sqrt{3} = 0; \left[\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3} + k\pi \right]$$

$$14. 6 \sin^2 x - 7 \cos x - 1 = 0; \left[\pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right]$$

$$15. 2\sqrt{3} \sin^2 x = \cos x; \left[\pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right]$$

$$16. \sin^2 x + \cos x + 1 = 0; \left[\pi + 2k\pi \right]$$

$$17. 3 \cos^2 x - 4 \cos x - \sin^2 x - 2 = 0; \left[\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \right]$$

$$18. \cos 2x + \sin x = 0; \left[\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \right]$$

$$19. \sin x = \cos x; \left[\frac{\pi}{4} + k\pi \right]$$

$$20. \sin x + \sqrt{3} \cos x = 0; \left[-\frac{\pi}{3} + k\pi \right]$$

$$21. \sin x + \cos x - 1 = 0; \left[2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right]$$

$$22. \sin x + \cos x + 1 = 0; \left[\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right]$$

23. $\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{3}; \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right]$

24. $\cos x + \cot x = 1 + \sin x; \left[\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right]$

25. $\sin^2 2x - \cos^2 2x = \cos 2x; \left[\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}; \frac{\pi}{2} + k\pi \right]$

26. $\sin 3x = \sin(2x + x) = 2 \sin x; \left[k\pi; \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right]$

27. $\tan x - \sin x + \cos x = 1; \left[2k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi \right]$

28. $2 \sin^2 x + \cos x = 2 \sin^2 x \cos x + 1; \left[2k\pi; \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \right]$

29. $\sin^2 x - \cos^2 x + \sin x = 0;$

30. $\sin^2 x = \sqrt{3} \sin x \cos x;$

31. $\tan x + \cot x = 3;$

31,5. $\sin 3x = 2 \sin 2x;$

32. $\sin 5x + \sqrt{3} \cos 5x = 1; [\sin^2 5x + \cos^2 5x = 1; subst...]$

33. $2 \sin x \sin 3x = 1; \left[\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{3\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{5\pi}{6} + k\pi \right]$

34. $1 + \cos x + \sin 2x + 2 \sin 3x + \sin 4x = 0; [3. + 5.vytkn.; 70^0; 110^0 + k.120^0]$

35. $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = \cos \frac{3\pi}{2};$

36. V intervalu $\langle 0; \pi \rangle$ řešte $81^{\sin^2 x} + 9^{1+\cos 2x} = 30; \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6} \right]$

37. V intervalu $\langle 0; \pi \rangle$ řešte $2^{4 \sin^2 x} + 2^{2(1+\cos 2x)} - 10 = 0; \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6} \right]$

Nerovnice, pozor na obracení znaménka!!!!!!

38. $\cos x \geq 1; \{2k\pi\}$

39. $\sin x < -\frac{1}{2} \sqrt{2}; k \in \mathbb{Z} \cup \left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi; \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \right)$

40. $\sqrt{3} \tan x - 1 < 0; \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{6} + k\pi \right)$

41. $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \geq \frac{1}{2}; \left\langle -\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$

42. $\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \geq 1; \left\langle -\frac{\pi}{12} + k\pi; \frac{\pi}{6} + k\pi \right\rangle!!!!$

43. $\cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 1; \left(\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$

44. $|\sin x| > \frac{1}{2}; \left(\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{5\pi}{6} + k\pi \right)$

45. $|\cos x| < \frac{1}{2}; (\frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{2\pi}{3} + k\pi)$

46. Řešte $v < 0; 2\pi > \sqrt{3} \tan x - 1 < 0; < 0; \frac{\pi}{6}) \cup (\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}) \cup (\frac{3\pi}{2}; 2\pi)$

47. Urči $D(f); y = \log \sin x; (2k\pi; \pi + 2k\pi)$

48. Urči $D(f); y = \frac{\log(16-x^2)}{\sqrt{\sin x}}; (-4; -\pi) \cup (0; \pi)$

49. $\sin x > \cos x; (\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{5\pi}{4} + 2k\pi)$

50. $\sin x > \frac{1}{\sin x}; (\pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi) - \{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\}$

51. $V < 0; \pi >$ řešte $\sin x + \cos x \leq \frac{1}{\sin x}; (0; \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{\pi}{2}; \pi)$

52. $V < 0; \pi >$ řešte $\frac{\cos 2x + \cos x - 1}{\cos 2x} > 2; (\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}) \cup (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4})$

53. $2 \sin^2 x + 7 \cos x - 5 \leq 0; < \frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{5\pi}{3} + 2k\pi >$

Vektory

- orientovaná úsečka
- operace s vektory; opačný vektor, násobek vektoru; nulový vektor; jednotkový vektor
- normalizace vektoru; $\vec{u} = (1; 3)$; $norm = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}; \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$; velikost vektoru
- skalární součin „DVOU“ vektorů = JE ČÍSLO
- úhel dvou vektorů $\cos \phi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$
- vektorový součin DVOU vektorů je VEKTOR, a pouze v 3dim - PROSTORU (pravidlo pravé ruky)
- kolinéární; komplanární, lineárně nezávislý vektor
- lineární kombinace; smíšený součin

1. Ukažte, že vektor $\vec{w} = (2; 3)$ je lineární kombinací $\vec{u} = (1; 1)$; $\vec{v} = (1; 2)$

2. Dány body $A[-2; -2]$; $B[3; -3]$; $C[6; 1]$. Určete D tak, aby tyto 4 body byly vrcholy rovnoběžníku. $D[1; 2]$; $D[11; 0]$; $D[-5; -6]$.

3. Na souřadnicové ose y určete A tak, aby měl od $B[-6; -5]$ vzdálenost 10; $[0; 3]$; $[0; -13]$

4. Na souřadnicové ose x určete A tak, aby měl od $B[-1; 2; 3]$ vzdálenost $\sqrt{14}$; $[0; 0; 0]$; $[-2; 0; 0]$

5. Zjistěte, zda je vektor u lineární kombinací a, b:

1. $u = (-8; 4; 3)$; $a = (-1; 2; 3)$; $b = (2; 0; 1)$; ano
2. $u = (6; 3; 1)$; $a = (0; -1; 2)$; $b = (3; 1; -1)$; ne

6. Jsou lineárně závislé nebo ne? $a = (2; 3; 6)$; $b = (1; 5; 2)$; $c = (1; 0; 3)$; nezávislé

7. Skalární součin vektorů, kdypak jsou vzájemně kolmé?

1. $u = (2; 1)$; $v = (1; 3)$
2. $u = (2; -1)$; $v = (3; 6)$
3. $u = (3; -1)$; $v = (-6; 2)$
4. $u = (-1; 2; 1)$; $v = (4; 1; 2)$
5. $u = (2; 1; 4)$; $v = (1; -3; -1)$
6. $u = (2; 1; 4)$; $v = (4; 2; 8)$

8. Určete $u \cdot v$

1. $|u| = 2$; $|v| = 3$; $\phi = 30^\circ$
2. $|u| = 12$; $|v| = 5$; $\phi = 120^\circ$

9. VIP a dobrý na hlavu!!! Určete ϕ , a , b :

1. $|a| = 2$; $|b| = 3$; $a \cdot b = -3\sqrt{3}$
2. $|a| = 1$; $|b| = \sqrt{5}$; $a \cdot b = 2$

10. Určete chybějící souřadnici u tak, aby byl kolmý k v:

1. $u = (2; u_2)$; $v = (1; 2)$; $[-1]$
2. $u = (2; u_2; -1)$; $v = (1; -5; -3)$; $[1]$

11. Určete u tak, aby měl velikost 10 a byl kolmý k $v = (-1; 2); [\pm 4\sqrt{5}; \pm 2\sqrt{5}]$
12. Dány vrcholy trojúhelníka ABC. Spočítejte úhly a obsah:
1. $A[1; 0]; B[2; 0]; C[2; \sqrt{3}]; [60^\circ; 90^\circ; 30^\circ; \frac{1}{2}\sqrt{3}]$
 2. $A[-2; 2]; B[-1; -3]; C[4; 0]; [60^\circ; 15^\circ; \dots; \approx 14]$
 3. $A[2; -1; 3]; B[1; 1; 1]; C[0; 0; 5]; [90^\circ; \dots; 4, 5]$
 4. $A[2; -1; 3]; B[2; 0;]; C[-3; 1; 5]; [98^\circ; 57^\circ; \dots; \approx 16, 34]$
13. Vypočítejte vektorový součin $u \times v$:
1. $u = (2; -1; 3); v = (3; 2; -2); [-4; 13; 7]$
 2. $u = (-4; -6; 0); v = (2; -7; 0); [0; 0; 40]$
 3. $u = (1; -2; 3); v = (-2; 4; -6); [0; 0; 0]$ copak tohle asi znamená? :-)
14. Dány body $A[-3; 1]; B[1; 4]$. Určete C, D tak, aby ABCD byl čtverec.
 $[[-6; 5]; [-2; 5] \cup [0; -2]; [4; 0]]$.
15. Dány body A, B. Určete bod M na ose x, aby úsečky AM a BM byly kolmé.
1. $A[0; 1]; B[5; 6]; [[2; 0]; [3; 0]]$
 2. $A[0; 1; 3]; B[-5; 3; -3]; [[-6; 0; 0]; [1; 0; 0]]$
16. Objem kvádrů, jehož body jsou $A[2; 0; 0]; B[0; 3; 0]; D[0; 0; 0]; H[0; 0; 4]$; smíšený vektorový součin
17. Vypočítejte obsah trojúhelníku ABC $A[1; 2]; B[3; 5]; C[6; 4]$.
18. Vypočítejte obsah trojúhelníku KLM; $K[-2; 1; -1]; L[6; 5; 0]; M[1; 6; 2]$ a jeho největší úhel.
19. Určete vektor u tak, aby byl kolmý na v určený body $U[1; -9]; V[9; -3]$; a aby jeho velikost $|u| = 5; [(-3; 4) \cup (3; -4)]$
20. Na ose y najděte bod C, aby trojúhelník ABC byl rovnoramenný o základně AB;
 $A[2; 1]; B[5; 4]; [0; 6]$
21. Určete nejmenší vnitřní úhel trojúhelníka ABC; $A[3; 2]; B[-1; -1]; C[11; 4]; [8^\circ; 34^\circ]$
22. Je dán vektor, určete parametr p , aby druhý byl k němu kolmý
1. $u = (4; 9); v = (p; 2); [-4; 5]$
 2. $u = (-1; 2; 3); v = (17; p; 3); [4]$
23. Jsou dány body $A[-2; 4]; C[8; 5]$. Určete souřadnice bodů B, D, aby čtyřúhelník ABCD byl čtverec. $C[2; 5; 9; 5]; B[3; 5; -0; 5]$.
24. Jsou dány body $K[2; 5]; L[6; 2]$. Určete souřadnice bodů M, N tak, aby KLMN byl obdélník a platilo $|KL| = 3|LM|$. $M_1[7; \frac{10}{3}]; N_1[3; \frac{19}{3}]; M_2[5; \frac{2}{3}]; N_2[1; \frac{11}{3}]$
25. Jsou dány body $K[-2; 2]; L[6; 8]$. Na ose x určete bod X tak, aby trojúhelník K LX byl pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu X. ; $X[2; 0]$

26. Body $E[2; -2; -2]$; $F[0; -1; -4]$; $G[2; 1 - 5]$ tvoří trojúhelník EFG. Dokažete, že je rovnoramenný a pravouhlý. U kterého vrcholu je pravý úhel? [$FG = EF = 3$; F]

27. Vypočítejte obvod, vnitřní úhly a obsah trojúhelníku $R[4; 1; 0]$; $S[4; -2; -3]$; $T[1; -2; 0]$.
[$9\sqrt{2}$; 60° ; $\frac{9}{2}\sqrt{3}$]

28. Na ose y určete bod Y tak, aby obsah trojúhelníku XYZ byl 10. Body $X[2; 1; 0]$; $Z[2; 2; 3]$; $Y_{1,2}[01 \pm 2\sqrt{10}; 0]$

29. Na ose x určete bod X tak, aby obsah trojúhelníku PQX byl 3.
 $P[4; 0]$; $Q[2; -4]$; $X_1[2, 5; 0]$; $X_2[5, 5; 0]$.

30. Vypočítejte objem čtyřbokého jehlanu ABCDV;
 $A[2; 3; 4]$; $B[-1; 4; -2]$; $D[0; 2; -5]$; $V[3; 2; 1]$; $[5]$.

31. Vypočítejte objem trojbokého hranolu $OPQO_1P_1Q_1$ o vrcholech
 $O[2; 0; 0]$; $P[0; 0; 0]$; $Q[0; 2; 0]$; $O_1[2; 0; 4]$; $[8]$.

Analytická geometrie lineárních útvarů v rovině

- vyjádření přímky: parametricky, obecně, směnicová rovnice (upravená obecná), úsekový tvar
- průsečíky, odchylky, vzdálenost bodu od přímky
- směrový, normálový vektor

1. Napište parametrické vyjádření přímky:

1. $A[3; -7]; a = (2; -1); [p : x = 3 + 2t; y = -7 - t]$
2. $A[4; 0]; a = (0; 5); [p : x = 4; y = 5t]$

2. Parametricky vyjádřete přímky a úsečky AB, BA, ús AB, ús BA a P?, aby $|AP| = 3|AB|$

1. $A[2; -7]; B[-3; 1]; [x = 2 - 5t; y = -7 + 8t; P[-13; 17]; t = 3]$
2. $A[3; -1]; B[-2; -1]; [x = 3 - 5t; y = -1; < 0; \infty); < 0; 1 >; (-\infty; 1 >]$

3. Obecná rovnice přímky:

1. $A[-3; 2]; n = (2; 1); [2x + y + 4 = 0]$
2. $A[3; -1]; u = (3; -2); [2x + 3y - 7 = 0]$
3. $A[2; 1]; B[-2; 4]; [3x + 4y - 10 = 0]$
4. $x = 2 - t; y = -3 + 2t; t \in R; [2x + y - 1 = 0]$
5. směnic. $y = -5x + 3; [5x + y - 3 = 0]$

4. Směnicový a obecný tvar rovnice přímky?

1. $k = -2; A[0; 3]; [y = -2x + 3; 2x + y - 3 = 0]$
2. $k = 3; A[2; -5]; [y = 3x - 11; 3x - y - 11 = 0]$
3. $A[2; 3]; B[3; 5]; [y = 2x - 1; 2x - y - 1 = 0]$
4. $A[3; -2]; B[3; 3]; [smernic.nejde; x - 3 = 0]$
5. $A[3; -2]; uhel 135^\circ s kladnou poloosou; [y = -x + 1; x + y - 1 = 0]$

5. Dány body $A[2; 1]; B[4; -3]; C[-1; 3]$. Jsou vrcholy trojúhelníku ABC? Napište obecné rovnice přímk obsahující

1. $v_a; [5x - 6y - 4 = 0]$
2. $osu strany AB; [x - 2y - 5 = 0]$

6. Dán trojúhelník ABC, $A[6; 2]; B[-2; 4]; C[-2; 0]$. Napište obecné rovnice přímk, které obsahují:

1. stranu AB; $[x + 4y - 14 = 0]$
2. stranu BC; $[x + 2 = 0]$
3. $t_a; [y - 2 = 0]$
4. $t_b; [3x + 4y - 10 = 0]$

7. Dána přímka $p: x = -2 + t; y = 2 - 2t$. Dány body $A[2; -6]; B[0; 4]; C[3; c_2]$.

1. leží A, B na přímce p? [A ano, B ne]
2. určete c_2 , aby $C \in p; [c_2 = -8]$
3. průsečíky přímky p s osami x, y; $[X[-1; 0]; Y[0; -2]]$

8. Dána obecná rovnice přímky $p: 2x - y + 3 = 0; a A[5; 1]; B[-3; 2]; C[0; 3]; D[1; -2]$.

1. Urči, kdo leží na p; $[C \in p]$
2. u zbývajících urči, leží-li v polorovině p a $[0; 0]; [A, D]$

3. $E[e_1; 9]; aby E \in p; [e_1 = 3]$
4. průsečíky p s osami x, y; $[X[-\frac{3}{2}; 0]; Y[0; 3]]$

9. k dané přímce p a bodu A napište obecnou rovnici přímky r, která je rovnoběžná s p a prochází bodem A.

1. $p : 3x - y + 1 = 0; A[3; -1]; [r : 3x - 1y - 10 = 0]$
2. $p : y = 2x + 3; A[1; -2]; [r : 2x - y - 4 = 0]$
3. $p : x = 1 + 2t; y = 2 - t; A[3; 4]; [x + 2y - 11 = 0]$
4. $p = MN; M[-3; 1]; N[4; -1]; A[1; 5]; [r : 2x + 7y - 37 = 0]$
5. přímka k, která prochází bodem A je k dané přímce p kolmá
 $x + 3y = 0; x + 2y + 3 = 0; 2x - y - 2 = 0; 7x - 2y + 3 = 0$

10. Urči vzájemnou polohu přímek a, b. Jsou-li různoběžné, urči souřadnice jejich průsečíku a urči jejich odchylku.

1. $2x - y + 3 = 0; x + y - 6 = 0; [\neq; P[1; 5]]$
2. $x - 3y - 1 = 0; -2x + 6y + 5 = 0; [||]$
3. $x + y - 2 = 0; 2x + 2y - 4 = 0; [a = b]$
4. $3x - 2y + 1 = 0; x = -1 - t, y = 4 + t; [\neq; P[1; 2]]$
5. $x = 2 - 3t, y = 1 - t; 2x - 6y + 5 = 0; [||]$
6. $x + 2y - 5 = 0; x = 1 - 2t, y = 2 + t; [a = b]$
7. $x = 1 - t, y = 2 + t; x = -1 - s, y = 4 + s; [a = b]$
8. $x = -1 - t, y = 3; x = 3 - 2s, y = 2 + s; [\neq; P[1; 3]]$
9. $x = 1 - 2t, y = 3 + t; x = 3 - 2s, y = s; [||]$ a odchylky si, děťátka, spočítají sama :-) !!!!

11. Dáno $p : 2x + 5y - 10; M[0; -4]; N[5; -3]$. Průnik

1. p a přímky MN; $P[10; -2]$
2. p a úsečky MN; \emptyset

12. Napište obecnou rovnici přímky m, procházející body $A[2; -3]$ a průsečíkem B přímek a, b, kde: $a : 2x + 7y - 8 = 0; b : x + 2y - 1 = 0. [x + y + 1 = 0]$

13. Určete souřadnice paty kolmice vedené bodem $M[2; -5]$ k přímce $p : x - 7y + 13 = 0; [P[1; 2]]$.

14. Určete souřadnice středu kružnice opsané trojúhelníku ABC, $A[0; 1]; B[4; 3]; C[6; 5]; [S[-3; 12]$ průsečík os stran]

15. Dány body $A[0; -1]; B[2; 0]; C[7; 5]$. Určete D tak, aby DA byla kolmá k AB a CD rovnoběžná s AB. $[D[-1; 3]; 4x + y + 1 = 0; x - 4y + 13 = 0]$

16. HLAVOLAM, doberj!!!! Dány body $A[-2; 1]; B[2; -2]; V[-1; -1]$. Určete C tak, aby bod V byl průsečík výšek v trojúhelníku ABC. $[C[-4; -5]; 4x - 3y + 1 = 0; x - 2y - 6 = 0]$

17. Určete odchylku přímek p, q:

1. $p : 2x - y + 1 = 0; q : 3x + y + 1 = 0; [45^\circ]$
2. $p : x - y + 1 = 0; q : y = -\frac{2}{3}x + 2; [11^\circ 19']$
3. $p : 8x - 15y + 10 = 0; q : \text{splyva s osou x}; [28^\circ 04']$
4. $p : 3x - y + 6 = 0; q : x = 2 + t, y = 1 - t; [63^\circ 26']$
5. $p : x - 2y + 13 = 0; q : AB : A[0; -1]; B[4; 1]; [0^\circ]$

6. $p : x = 1 - 3t, y = 2 + t; q : x = 3 - s, y = 1 - 3s; [90^\circ]$

18. Určete vzdálenost M od přímky p:

1. $M[2; -1]; p : 3x + 4y - 12 = 0; [2]$
2. $M[-4; -3]; p : AB : A[1; 1]; B[2; 3]; [\frac{6}{5}\sqrt{5}]$
3. $M[2; 4]; p : x = 6 + 3t, y = -8 - 4t; [4]$

19. V trojúhelníku ABC, kde $A[6; 2]; B[-2; 4]; C[-2; 0]$ určete v_a a pak ji využijte k výpočtu obsahu trojúhelníka. Pak ještě pomoci vektoráku, jo? [$v_a = 8; S = 16$]

20. Mezi všemi přímkami $5x + 12y + c = 0$; najděte tu, jejíž vzdálenost od bodu $P[0; 0]$ je $d = 3$. [$5x + 12y \pm 39 = 0$]

21. Na přímce $p : 4x - 12y - 2 = 0$; najděte body, které mají od přímky $q : 5x + 12y + 5 = 0$ vzdálenost $d = 3$; [$[4; \frac{7}{6}] \cup [-\frac{14}{3}; -\frac{31}{18}]$].

22. Bodem $A[3; 5]$ ved'te přímku, která má od $p : y - 2x + 1 = 0$ odchylku 45° . [$y = \frac{1}{3}x + 4; y = -3x + 14$].

23. Na přímce $p : 3x - 2y - 6 = 0$ najděte bod $A[x_a, y_a]$, který má od přímky $q : 3x - 4y + 3 = 0$ vzdálenost $d = 3$

24. Je dán trojúhelník ABC: $A[-4; -1]; B[2; 3]; C[-3; 0]$. Napište rovnice os strany AB, t_a, v_c . Určete obsah trojúhelníka. [$3x + 2y + 1 = 0; -\frac{5}{2}x + \frac{7}{2}y - \frac{13}{2} = 0; 3x + 2y + 9 = 0; S = \dots$]

25. Urči směrový úhel přímky $a=KL$. $K[3\sqrt{3}; 2]; L[2\sqrt{3}; 5]; [\omega = 120^\circ]$

26. Bodem $A[1; 3]$ ved'te přímky s odchylkou 45° k přímce $p : 4y - 7 = 0; [y = -x + 4; y = x + 2]$

27. Bodem $A[5; 3]$ ved'te kolmici k přímce $p : UV : U[2; 1]; V[2; 5]; [y - 3 = 0]$

28. Je dán bod $A[3; -1]; p : 2x + y - 3 = 0$. napiš rovnici přímky, která prochází bodem A a svírá s přímkou p úhel 90° (45°). [$y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}; \dots$]

29. Napište rovnici přímky, která prochází bodem $Q[2; 1]$ a má od bodu $S[5; 10]$ vzdálenost $d = 3$.

Kružnice, elipsa

- Středový tvar
- tečny v bodě, || se směrem, z bodu (x_1, y_1) : $x_1x + y_1y = r^2$; $x' + yy' = 0$
- přímka kružnice, elipsa; $D > ; = ; < 0$
- odvození středové rovnice elipsy; $e^2 = a^2 - b^2$; $|EL| + |FL| = 2a$; $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

1. Trojúhelníku ABC; A[5; 1]; B[0; 6]; C[4; -2] opište kružnici.

2. Napište rovnice tečny $k : x^2 + y^2 = 25$ v bodě $T[3; -4]$; [vyjádřit přímku, dopočítat q; dosadit zpět a dopočítat]

1. rovnice tečny v bodě $x_0 = 3; y_0 = -4$: $x \cdot x_0 + y \cdot y_0 = 25$; $3x - 4y = 25$
2. normálový vektor přímky je ST a dopočítat koeficienty přes $T[3; -4]$
3. implicitní funkce
4. dosazení (masakr, ale zaručeně spolehlivá metoda)

3. Napište analytické vyjádření útvarů:

1. kružnice $S[-1; 3]$; $r = 3$; $[(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 9]$
2. vnitřek kružnice $S[2; 0]$; $r = 2\sqrt{3}$; $[(x - 2)^2 + y^2 < 12]$
3. vnějšek kružnice $S[-5; -2]$; $r = 3\sqrt{2}$; $[(x + 5)^2 + (y + 2)^2 > 18]$
4. kruh $S[0; 5]$; $r = 2$; $[x^2 + (y - 5)^2 \leq 4]$

4. Rovnici kružnice, $S[6; 7]$

1. procházející $A[0; 9]$; $[(x - 6)^2 + (y - 7)^2 = 40]$
2. dotýká se $p : 5x - 12y - 24 = 0$; $[(x - 6)^2 + (y - 7)^2 = 36$, najdu T a dosadím..]
3. dotýká se souřadnicové osy y : $(x - 6)^2 + (y - 7)^2 = 36$

5. Rovnici kružnice, která

1. má $S \in p : x - y - 5 = 0$; $proch.A[2; 2]; B[-3; -3]$; $[(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 25]$
2. má $S \in p : 3x - 4y - 3 = 0$; a prochází body $A[5; 3]; B[6; 2]$; $[(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 5]$

6. Napište rovnice kružnice opsané trojúhelníku ABC:

1. $A[2; 1]; B[1; 4]; C[6; 9]$; ...
2. $A[-1; 3]; B[0; 2]; C[-1; 1]$;

7. Napište rovnici kružnice, která:

1. prochází bodem $M[9; 2]$ a dotýká se obou souřadnicových os
2. $r = 5$; prochází bodem $Q[3; 5]$ a její střed leží na $p : 2x + 3y - 4 = 0$

8. Bodem $Q[3; 5]$ veďte tečnu ke $k : x^2 + y^2 = 9$; $[y = kx + q, q = \dots; dosadím a D = 0...]$

9. Urči S, r $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 12 = 0$. Urči rovnice tečen || s $p : x - 2y + 5 = 0$; $[S[4; -1]; r = \sqrt{5}; t : \dots\dots]$

Elipsa

10. Načrtněte elipsu: $9x^2 + 25y^2 - 54x - 100y - 44 = 0$; $[\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1; \dots]$

11. Načrtněte elipsu: $3x^2 + 2y^2 + 6x - 5 = 0$; $\left[\frac{(x+1)^2}{\frac{8}{3}} + \frac{y^2}{4} = 1; S[-1; 0]; a = 2; b = \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{6} \right]$

12. Napište rovnici elipsy, jejíž hlavní osa je \parallel s osou x:

1. $S[0; 0]; a = 5; b = 3; \left[\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1; [\pm 5; 0]; [0; \pm 3] \right]$
2. $S[2; -1]; a = 2; b = 2; \left[\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1; [-1; 5; 0]; [2; 1, -3] \right]$
3. $S[-2; 0]; a = 5; b = 3; \left[\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1; [-7; 3; 0]; [-2; \pm 4] \right]$
4. $S[-2; 3]; b = 3; \text{jeden bod } X[2; 4, 8]; \left[\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1; \right] + \text{vrcholy a náčrt, jo?}$
5. hlavní vrchol $A[3; 1]$, vedlejší vrchol $C[7; 3]; \left[\frac{(x-7)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1; \right] + \text{zbytek...}$

13. Napište rovnici elipsy, je-li dáno:

1. $S[0; 3]; A[3; 3]; B[0; -2]; \left[\frac{x^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1 \right]$
2. $F[5; 5]; A[8; 5]; B[-2; 5]; \left[\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y-5)^2}{21} = 1 \right]$
3. vedlejší vrcholy $C[3; 5]; D[3; -1]; e = 4; \left[\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1 \right]$

14. Určete S, směr hlavní osy, délky poloos, e, vrcholy, ohniska:

1. $\frac{(x-1)^2}{169} + \frac{(y+3)^2}{25} = 1; [a = 13; b = 5; e = 12; F[-11; -3]; G[13; -3]; ...]$
2. $25(x+2)^2 + 9y^2 = 225; [a = 5; b = 3; e = 4; F[-2; 4]; G[-2; -4]; \text{osa} \parallel y]$
3. $16x^2 + 25y^2 - 64x + 150y - 111 = 0; [a = 5; b = 4; e = 3; F[-1; -3]; G[5; -3]; \text{osa} \parallel x]$

15. Je to elipsa? Jestliže ano, tak určete S, směr hlavní osy, a, b:

1. $9x^2 + 16y^2 - 54x + 64y + 1 = 0; [a = 4; b = 3; ...]$
2. $25x^2 + 4y^2 - 12y - 91 = 0; [o_1 \parallel y; a = 5; b = 2; ...]$
3. $x^2 + 2y^2 - 4y - 16y + 36 = 0; [ne]$
4. $2x^2 + 4y^2 + 4x - 16y + 36 = 0; [ne]$
5. $16x^2 + 25y^2 - 32x - 84 = 0; [o_1 \parallel x; a = \frac{5}{2}; b = 2; ...]$

16. Odvození středové rovnice elipsy z metrických vlastností:

$$|EL| + |FL| = 2a$$

$$|EL| = \sqrt{(x+e)^2 + y^2}; |FL| = \sqrt{(x-e)^2 + y^2}; \sqrt{(x+e)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-e)^2 + y^2} \dots$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

17. Určete rovnice tečny elipsy $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ve jejím bodě $T[4; -\frac{9}{5}]; [4x - 5y - 25 = 0]$

18. Rovnice tečen elipsy, která má rovnici $(x-1)^2 + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$ v jejích průsečících s přímkou $p: y = -2x; [2x - y - 4 = \pm 2\sqrt{2}]$.

19. Určete parametr k tak, aby přímka $y = kx + 1$ byla vnější přímkou elipsy:

$$2x^2 + y^2 + 4x - 2y + 2 = 0; [\text{je to elipsa?}; D < 0 \dots]$$

Mix

20. Napište rovnici kružnice, která se dotýká přímky $p: 3x + 4y - 15 = 0$; její střed leží na přímce $q: x + 2y + 6 = 0$ a poloměr $r=5$. $[(x-2)^2 + (y+4)^2 = 25; (x-52)^2 + (y+29)^2 = 25]$.

21. Napište rovnici kružnice, která má střed $S[-5; 4]$ a na přímce $p : y = 2x + 4$ vytíná tětivu délky 8. $[(x + 5)^2 + (y - 4)^2 = 36]$.

22. Napište rovnici kružnice, která prochází body $E[3; 2]; F[1; 4]$ a dotýká se osy x . $[(x - 9)^2 + (y - 10)^2 = 100; (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4]$

23. Napište rovnici kružnice, která se dotýká osy x i y . Střed kružnice leží na přímce $p : x + 3y - 4 = 0; [(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1; (x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 4]$

24. Napište rovnici kružnice, která se dotýká osy x i y . Střed kružnice leží na přímce $p : x - y + 3 = 0; [(x + 1, 5)^2 + (y - 1, 5)^2 = \frac{9}{4}]$

25. Napište rovnici kružnice, která se dotýká přímek $p : x = -2; q : y = 1$ a prochází bodem $M[1; -5]; [(x - 13)^2 + (y + 14)^2 = 225; (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9]$

26. Napište rovnici kružnice, která se dotýká přímek $p : 3x - 4y + 1 = 0; q : 3x - 4y + 5 = 0$. Její střed leží na přímce $r : 3x + 2y = 0; [(x + \frac{1}{2})^2 + (y - 0, 5)^2 = \frac{4}{25}]$

27. Napište rovnici kružnice, která prochází bodem $M[1; 1]$ a dotýká se daných přímek $p : x + y - 6 = 0; q : x + y + 2 = 0; [(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 8; (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 8]$

28. Napište rovnici kružnice, která prochází bodem $M[2; 1]$ a dotýká se daných přímek $p : x - y - 3 = 0; q : 7x + y + 3 = 0; [(x - 2, 5)^2 + (y - 4, 5)^2 = \frac{25}{2}; (x - 1)^2 + y^2 = 2]$.

29. Napište rovnici elipsy, znáte-li jedno ohnisko $E[3; -2]$ a vedlejší vrcholy $C[6; 2]; D[6; -6]; [\frac{(x-6)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1]$.

30. Napište rovnici elipsy, která se dotýká osy x v bodě $X[-4; 0]$ a osy y v bodě $Y[0; -3]; [\frac{(x+4)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1]$.

31. Napište rovnici elipsy, která má hlavní osu totožnou s osou y , střed $S[0; 0]$, hlavní poloosa $= 4\sqrt{2}$; a elipsa prochází bodem $M[-2\sqrt{2}; 4]; [\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{32} = 1]$

32. Napište rovnici elipsy, která má osy shodné s osami soustavy souřadnic a prochází body $M[-6; \sqrt{7}]; N[3\sqrt{2}; 4]; [\frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{25} = 1]$

33. Napište rovnici elipsy, která má osy rovnoběžné s osami souřadnic, střed $S[-3; 1]$ a prochází body $K[9; 9]; L[13; -5]; [\frac{(x+3)^2}{400} + \frac{(y-1)^2}{100} = 1]$.

Parabola

- vzdálenost bodu od přímky
- odvození rovnice paraboly, pro $F[0; \frac{p}{2}]; X[x; y]; D[x; -\frac{p}{2}]$... V počátku soustavy souřadnic $\rightarrow x^2 = 2py$;
- p parametr paraboly;
- $x^2 = \pm 2py; \cup \cap$
- $y^2 = \pm 2px; \supseteq \subseteq$
- přímka a parabola $D >, =, < 0$
- vnitřek paraboly < 0
- vnějšek paraboly > 0
- POZOR na tečnu paraboly a přímku (sečnu) mající 1 společný bod (rovnoběžná s osou paraboly)

1. Bodem $H[-3; -1]$ veďte přímky, které mají s parabolou $x^2 + 2x - 2y - 3 = 0$ 1 společný bod

1. bod leží?...vně > 0
2. sečna, přímka \parallel s osou y, protože parabola je typu U.... $p_1 : x = -3$
3. tečny (2): $y = kx + q; q = 3k - 1; \rightarrow x^2 + 2x - kx - 3k + 1 - 3 = 0; [k_1 = -2; q_1 = -7;]; [k_2 = -6; q_2 = -19]$

2. Napište rovnici paraboly a načrtněme ji. Body paraboly jsou:

$K[1; 7]; L[-1; 3]; M[0; 4];$ osa $\parallel y; [x^2 + Ax + By + C = 0; 1 + A + 7B + C = 0, \dots]$

3. Parabola je dána $x^2 + 2x - y - 3 = 0$; napište rovnici ve vrcholovém tvaru, v, P, f, D: $[(x + 1)^2 = y + 4; V[-1; -4]; p = \frac{1}{2}; F[-1; -3, 75]; d : y = -4, 25]$

4. Pro která m bude přímka $p : 3x - 2y + m = 0$ tečna, sečna či vnější přímka paraboly $y^2 - 6x + 6y + 3 = 0$? $[m = -1 \dots t; m < -1$ vnější přímka; $m > -1$ sečna].

5. Bodem $A[-7; 0]$ veďte tečny k parabole $y^2 - 16x - 4y - 12 = 0$; $[q = 7k; \text{lepe dosadit } x = \frac{y}{k} - 7; y_1 = x + 7; y_2 = -\frac{2}{3}x - \frac{14}{3}]$.

6. Dány body $A[2; 4]; B[-1; 7]; C[1; 3];$ osa $\parallel y$. Určete vrcholovou rovnici, V, d, F paraboly. $[x^2 + Ax + By + C = 0 \dots (x - 1)^2 = y - 3; V[1; 3]; F[1; 3, 25]; d : y = \frac{11}{4}]$.

7. Určete parametr t tak, aby přímka $x + 4y + t = 0$ byla sečnou paraboly $y^2 + 3x + 4y - 8 = 0$. $[x = -t - 4y$ a dosadím... $y^2 + 3(-4 - y - t) + 4y - 8 = 0; D > 0 \dots t > -8]$

8. Napište rovnici paraboly s vrcholem $V[0; 0]$ a:

1. $F[2; 0]; [y^2 = 8x]$
2. $F[-\frac{3}{2}; 0]; [y^2 = -6x]$
3. $F[0; 1]; [x^2 = 4y]$
4. $F[0; -3]; [x^2 = -12y]$

9. Napište rovnici paraboly s $V[0; 0]$ procházející bodem $A[2; -4]$, jejíž osa:

1. splývá se souřadnicovou osou x; $[y^2 = 8x; F[2; 0]; d : x = -2]$
2. splývá se souřadnicovou osou y; $[x^2 = -y; F[0; -\frac{1}{4}]; d : y = \frac{1}{4}]$
3. určete souřadnice ohniska a rovnici řídící přímky

10. Najděte rovnici paraboly v V a F:

1. $V[2; 3]; F[4; 3]; [(y-3)^2 = 8(x-2); o : y = 3; [4; -1]]$
2. $V[3; -2]; F[3; -1]; [(x-3)^2 = 4(y+2); o : x = 3; [1; -1]]$
3. $V[-2; 3]; F[-3; 3]; [(y-3)^2 = -4(x+2); o : y = 3; [-3; 1]]$
4. $V[-1; -1]; F[-1; -4]; [(x+1)^2 = -12(y+1); o : x = -1; [5-4]]$

11. Napište rovnici paraboly o vrcholu $V[3; -7]$, která prochází bodem $M[4; -5]$ a její osa je \parallel s :

1. osou x; $[(y+7)^2 = 4(x-3); F[4; -7]; d : x = 2]$
2. s osou y; $[(x-3)^2 = \frac{1}{2}(x+7); F[3; -\frac{7}{8}]; d : 8y + 57 = 0]$

12. Zapište rovnici osy paraboly, V, p, F:

1. $y^2 = 8x; [V[0; 0]; p = 4; F[2; 0]; o : y = 0; x^+]$
2. $y^2 = -4x; [V[0; 0]; p = 2; F[-1; 0]; o : y = 0; x^-]$
3. $x^2 = 16y; [V[0; 0]; p = 8; F[0; 4]; o : x = 0; y^+]$
4. $x^2 = -6y; [V[0; 0]; p = 3; F[0; -\frac{3}{2}]; o : x = 0; y^-]$
5. $(x-1)^2 = 12(y+3); [V[1; -3]; p = 6; F[1; 0]; x = 1; y^+]$
6. $(y+2)^2 = -16(x-2); [V[2; -2]; p = 8; F[-2; -2]; y = -2; x^-]$
7. $(x-3)^2 = -8(y-1); [V[3; 1]; p = 4; F[3; -1]; x = 3; y^-]$
8. $(y+1)^2 = 4(x+3); [V[-3; -1]; p = 2; F[-2; -1]; y = -1; x^+]$

13. Určete V, osu, p, F paraboly:

1. $x^2 + 2x - 2y + 3 = 0; [V[-1; 1]; o \parallel y; y^+; p = 1; F[-1; \frac{3}{2}]]$
2. $x^2 + 6x + 3y + 15 = 0; [V[-3; -2]; o \parallel y; y^-; p = \frac{3}{2}; F[-3; -\frac{11}{4}]]$
3. $y^2 - 4x - 4y + 16 = 0; [V[3; 2]; o \parallel x; x^+; p = 2; F[4; 2]]$
4. $y^2 + 5x + 2y + 6 = 0; [V[-1; -1]; o \parallel x; x^-; p = \frac{5}{2}; F[-\frac{9}{4}; -1]]$
5. $2y^2 - 11x + 12y + 73 = 0; [V[5; -3]; o \parallel x; x^-; p = \frac{11}{4}; F[\frac{51}{8}; -3]]$
6. $x^2 + 2y - 3 = 0; [V[0; \frac{3}{2}]; o \parallel y; y^-; p = 1; F[0; 1]]$

14. Napište obecnou i vrcholovou rovnici paraboly:

1. osa je \parallel s osou y a body $A[0; 0]; B[-1; -3]; C[-2; -4]$ jsou body paraboly;
 $[x^2 + 4x - y = 0; (x+2)^2 = y + 4]$
2. osa je \parallel s osou x a body $A[-2; 5]; B[3; 7]; C[-6; 1]$ jsou body paraboly;
 $[y^2 - 4x - 2y - 23 = 0; (y-1)^2 = 4(x+6)]$.

15. Napište rovnici paraboly, která má vrchol $V[2; -5]$ a řídicí přímku:

1. $x = 4; [(y+5)^2 = -8(x-2)]$
2. $x = 3; [(y+5)^2 = 20(x-2)]$
3. $y = 5; [(x-2)^2 = -40(y+5)]$
4. $y = -6; [(x-2)^2 = 4(y+5)]$

16. Napište rovnici paraboly, která ohnisko $F[3; -1]$ a řídicí přímku:

1. $y = 5; [(x-3)^2 = -12(y-2)]$
2. $y = -3; [(x-3)^2 = 4(y+2)]$
3. $x = 7; [(y+1)^2 = -8(x-5)]$
4. $x = 1; [(y+1)^2 = 7(x-2)]$

17. Napište rovnici paraboly, která má vrchol v počátku, osa paraboly je shodná s osou x a parabola prochází bodem M :

1. $M[4; 8]; [x^2 = 2y]$
2. $M[2; -6]; [x^2 = -\frac{2}{3}y]$

18. Napište rovnici paraboly, která má vrchol v počátku, osa paraboly je shodná s osou y a parabola prochází bodem M :

1. $N[-4; -1]; [y^2 = -\frac{1}{4}x]$
2. $N[4; 4]; [y^2 = 4x]$

19. Napište rovnici paraboly, jejíž ohnisko je $F[0; -4]$, tečna ve vrcholu má rovnici $x - 4 = 0; [(y + 4)^2 = -16(x - 4)]$

20. Napište rovnici paraboly, která prochází bodem $L[4; 5]$, její osa má rovnici $x - 2 = 0$ a tečna ve vrcholu má rovnici $y - 1 = 0; [(x - 2)^2 = y - 1]$

21. Napište rovnici paraboly, znáte-li vrchol $V[-4; -2]$ a víte-li, že prochází bodem $K[-1; 2]$ a zároveň platí:

1. osa paraboly je rovnoběžná s osou x ; $[(y + 2)^2 = \frac{16}{3}(x + 4)]$
2. osa paraboly je rovnoběžná s osou y ; $[(x + 4)^2 = \frac{9}{4}(y + 2)]$

22. Napište rovnici paraboly, která prochází body $A[1; 2]; B[5; 2]; C[-1; 5]; D[7; 5]$.
 $[(x - 3)^2 = 4(y - 1)]$

23. Napište rovnici paraboly, která prochází body $M[-2; 3]; N[6; 3]$. Tečna ve vrcholu má rovnici $y = 4; [(x - 2)^2 = -16(y - 4)]$

24. Napište rovnici paraboly, která má osu rovnoběžnou s osou x , prochází body $K[0; 0]; L[0; -4]$. Ohnisko je $F[0; -2]$; $[2res; (y + 2)^2 = \pm 4(x \pm 1)]$

25. Napište rovnici paraboly, která prochází body $E[3; 8]; F[-5; 0]; G[-2; -2]$. Její osa je rovnoběžná s osou x . $[(y - 2)^2 = 4(x + 6)]$

26. Napište rovnici paraboly, která prochází body $K[-5; 3]; L[1; -3]; M[-9; -13]$. Její osa je rovnoběžná s osou y . $[(x + 3)^2 = -2(y - 5)]$

27. Napište rovnici paraboly, která prochází body $R[2; 0]; S[0; 4]; T[1; 1]$. Její osa je rovnoběžná s některou osou soustavy souřadnic. $[2res; (y - \frac{7}{2})^2 = 6(x + \frac{1}{24}); (x - 2)^2 = y]$.

Hyperbola

- odvození rovnice $||EX| - |FX|| = 2a > 0; e^2 = a^2 + b^2$
- dva typy
 - klasická... $+\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ osa \parallel s x; nebo $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ osa \parallel s y
 - rovnoosá; $y = \frac{a}{x}$; (nepřímá úměrnost, asymptoty jsou vzájemně kolmé - souřadnicové osy)
- asymptoty $y = \pm \frac{bx}{a}$
- rovnice tečny $\frac{x \cdot x_0}{a^2} - \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1$
- přímka a hyperbola, 0, 1 (tečna nebo sečna \parallel s asymptotou, 2 společných bodů.
- vnější hyperboly > 0

1. Najděte důležité prvky hyperboly, rovnice jejích asymptot:

$$9x^2 - 16y^2 - 90x - 64y + 17 = 0; \frac{(x-5)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1; a = 4; b = 3; e = 5; S[5; -2]; E[...]; F[...]$$

$$a : y = \pm \frac{3}{4}x + q; S \in a \dots \text{dopoc } q$$

2. Pro které hodnoty t bude $p : x - y + t = 0$ sečnou hyperboly $4x^2 - 25y^2 - 100 = 0$?

[Dosadím a $D > 0$. Pak ještě $D = 0$ a podle směrnice asymptot zjistit, není-li to \parallel s asymptotou].

3. Bodem $P[\frac{1}{3}; 2]$ veďte přímky, které mají s $9x^2 - y^2 = 1$ jeden společný bod

- tečny: $t_{1,2} : y = kx + q; P \in t; q = 2 - \frac{1}{3}k \dots \text{dosa dim } \dots D = 0 \dots$
- sečna \parallel s asymptotou: $a : y = \frac{x}{3} = 3x; [y_1 = 3x + 1; y_2 = -3x - 3]$

4. Najděte důležité prvky hyperboly: S, a, b, e, E, F, rovnici asymptot a sečnu \parallel s asymptotami

$$y^2 - 4x^2 + 2y + 8x - 11 = 0; [S[1; -1]; a = \sqrt{2}; b = \sqrt{8}; e = \sqrt{10}; \frac{(y+1)^2}{8} - \frac{(x-1)^2}{2} = 1;]$$

$$[as : y = \pm 2(x - 1) - 1]$$

5. Hyperbola má $E[-5; 0]; F[5; 0]$; prochází bodem $M[1; 0]$. Její rovnice?

$$[24x^2 - y^2 = 24; a^2 + b^2 = 25!]$$

6. Určete S, E, F hyperboly $x^2 + 6x - y^2 + 6y + 4 = 0; [\frac{(y-3)^2}{4} - \frac{(x+3)^2}{4} = 1; S[-3; 3]; a = 2; b = 2]$

$$[e = 2\sqrt{2}; E[-3; 3 + 2\sqrt{2}]; F[-3; 3 - 2\sqrt{2}]].$$

7. Napište rovnici hyperboly s $E[0; 2]; F[0; 6]$, která prochází bodem $L[0; 3]$.

$$[\frac{(y-4)^2}{1} - \frac{x^2}{3} = 1]$$

8. Napište rovnici hyperboly, jejíž osa je \parallel s osou x:

1. $S[0; 0]; a = 3; b = 2; [\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{1} = 1; A[-3; 0]; B[3; 0]; k = \pm \frac{2}{3}]$
2. $S[-1; 2]; a = 1; b = 3; [\frac{(x+1)^2}{1} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1; A[-2; 2]; B[0; 2]; k = \pm 3]$
3. $S[3; 0]; b = 3; e = 5; [\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1; A[-1; 0]; B[7; 0]; k = \pm \frac{3}{4}]$
4. Vrchol $A[1; -3]; 2a = 8; e = 5; [\frac{(x-5)^2}{16} - \frac{(y+3)^2}{9} = 1; S[5; -3]; B[9; -3]; k = \pm \frac{3}{4}]$ a ještě? $[\frac{(x+3)^2}{16} - \frac{(y+3)^2}{9} = 1; S[5; -3]; B[-7; -3]; k = \pm \frac{3}{4}]$
5. $S[0; 0]; a = 0; \text{bod } X[5; \frac{16}{3}]; [\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1; A[-3; 0]; B[3; 0]; k = \pm \frac{4}{3}]$

9. Napište rovnici hyperboly, je-li dáno:

1. vrcholy $A[-3; -2]; B[7; -2]; b = 3; \left[\frac{(x-2)^2}{25} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1 \right]$
2. vrcholy $A[2; 3]; B[2; -5];$ ohnisko $F[2; 4]; \left[\frac{(y+1)^2}{16} - \frac{(x-2)^2}{9} = 1 \right]$
3. ohniska $F[-6; 0]; G[4; 0];$ délka hlavní osy $2a = 6; \left[\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \right]$

10. Určete S, směr hlavní osy, délky poloos, e, vrcholy, ohniska a směrnice asymptot:

1. $9x^2 - 16y^2 = 144; [S[0; 0]; o_1 || x; a = 4; b = 3; e = 5; F, G[\pm 5; 0]; k = \pm \frac{3}{4}]$
2. $\frac{(y-5)^2}{25} - \frac{(x+3)^2}{11} = 1; [S[-3; 2]; o_1 || y; a = 5; b = \sqrt{11}; e = 6;]$
 $[A[-3; 10]; B[-3; 0]; F[-3; 11]; G[-3; -1]; k = \pm \frac{5}{\sqrt{11}}]$
3. $9x^2 - 16y^2 + 36x + 32y + 164 = 0; [S[-2; 1]; o_1 || y; a = 3; b = 4; e = 5;]$
 $[A[-2; -2]; B[-2; 4]; F[-2; 6]; G[-2; -4]; k = \pm \frac{3}{4}]$
4. $5x^2 - 4y^2 - 20x - 16y - 16 = 0; [S[2; -2]; o_1 || x; a = 2; b = \sqrt{5}; e = 3; A[0; -2]; B[4; -2]]$
 $[F[-1; -2]; G[5; -2]; k = \pm \frac{1}{2} \sqrt{5}]$

11. Rozhodněte, zda-li jde o hyperbolu, v kladném případě určete S, směr hlavní osy a délky poloos.

1. $x^2 - 4y^2 - 6x - 16y - 11 = 0; [S[3; -2]; o_1 || x; a = 2; b = 1]$
2. $4x^2 - 5y^2 + 24x + 20y + 36 = 0; [S[-3; 2]; o_1 || y; a = 2; b = \sqrt{5}]$
3. $9x^2 - 4y^2 + 36x + 8y + 32 = 0;$ nejde, 2 různoběžky
4. $4x^2 - 4y^2 - 8x + 16y - 37 = 0; [S[1; 2]; o_1 || x; a = b = \frac{5}{2}].$

12. Napište rovnici hyperboly, která má ohniska v bodech $E[-2; 0]; F[18; 0]$ a hlavní poloosu o délce 8. $\left[\frac{(x-8)^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1 \right]$

13. Napište rovnici hyperboly, která má ohniska $E[1; 1]; F[1; 11]$ a vedlejší poloosu o délce 4. $\left[\frac{(y-6)^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{16} = 1 \right]$

14. Napište rovnici hyperboly, která má ohniska $E[-6; 2]; F[14; 2]$ a hlavní vrchol $A[4; 1]; \left[\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{12} = 1 \right]$

15. Napište rovnici rovnoosé hyperboly, která má ohniska $E[-6; 1]; F[14; 2]; \left[\frac{(x-4)^2}{50} - \frac{(y-2)^2}{50} = 1 \right]$

16. Napište rovnici hyperboly, která má vrcholy $A[0; -3]; B[-4; -3]$ a jedno ohnisko $E[-5; -3]; \left[\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(y+3)^2}{5} = 1 \right]$

17. Napište rovnici hyperboly, která má osy shodné s osami souřadnic a prochází body:

1. $M[4; 2\sqrt{6}]; N[2\sqrt{3}; 4]; \left[\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1 \right]$
2. $M[3; 5\sqrt{2}]; N[2; 5]; \left[\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{1} = 1 \right]$

18. Napište rovnici hyperboly, která má osy rovnoběžné s osami souřadnic, střed $S[2; -1]$ a prochází body:

1. $M[30; 23]; N[-6; 5]; \left[\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{12} = 1 \right]$

2. $M[3; \frac{1}{2}]; M[6; 2]; \left[\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1 \right]$

19. Napište rovnici hyperboly, která prochází bodem $M[30; 24]$ a má ohniska $E[0; 4\sqrt{6}]; F[0; -4\sqrt{6}]; \left[\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{60} = 1 \right]$

20. Napište rovnici hyperboly, víte-li, že její asymptoty $a_1 : y = 2x; a_2 : y = -2x$ mají dané rovnice a jeden vrchol $B[3; 0]; \left[\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1 \right]$

21. Napište rovnici hyperboly, víte-li, že její asymptoty $sa_{1,2} : y = \pm 2(x - 3)$ mají dané rovnice a znáte-li jedno ohnisko $E[-2; 0]; \left[\frac{(x-3)^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1 \right]$

22. Napište rovnici hyperboly, víte-li, že její asymptoty $a_{1,2} : y - 1 = \pm 3x$ mají dané ohnisko a jedno ohnisko je $E[-20; 1]; \left[\frac{x^2}{40} - \frac{(y-1)^2}{360} = 1 \right]$

23. Napište rovnici hyperboly, která má osy rovnoběžné s osami souřadnic, jedno ohnisko $E[0; 10]$ a rovnice jedné asymptoty je $a_{1,2} : y = \pm 2x; \left[\frac{x^2}{30} - \frac{(y-10)^2}{5} = 1 \right]$

24. Napište rovnici hyperboly, která prochází počátkem soustavy souřadnic a její asymptoty jsou přímky $a_1; a_2 :$

1. $a_1 : 3x - y + 9 = 0; a_2 : 3x + y + 3 = 0; \left[\frac{(x+2)^2}{3} - \frac{(y-3)^2}{27} = 1 \right]$
 2. $a_1 : y = x + 2; a_2 : y = -x + 6; \left[\frac{(y-4)^2}{12} - \frac{(x-2)^2}{12} = 1 \right]$

25. Úpravou na středový tvar rovnice rozhodněte, jde-li o hyperbolu, určete všechny důležité prvky (ohniska, střed, poloosy, excentricitu, asymptoty):

1. $4x^2 - 9y^2 + 18y - 45 = 0; [F_{1,2}[\sqrt{13}; 1]; a_{1,2} : y - 1 = \pm \frac{2}{3}x]$
 2. $9x^2 - 4y^2 + 8y + 32 = 0; [F_{1,2}[0; 1 \pm \sqrt{13}]; a_{1,2} : y - 1 = \pm \frac{3}{2}x]$
 3. $9x^2 - 4y^2 - 8y - 40 = 0; [F_{1,2}[\pm \sqrt{13}; -1]; a_{1,2} : y + 1 = \pm \frac{3}{2}x]$
 4. $x^2 - y^2 + 2x - 2y = 1$

Polohové úlohy - kuželosečky obecně

26. Vyšetřete vzájemnou polohu přímky a kuželosečky:

1. $p : 2x + y - 6 = 0; 4x^2 + y^2 = 20; [\text{sec } na; P_1[2; 2]; P_2[1; 4]]$
 2. $p : 3x - y - 5 = 0; 2x^2 - y^2 - 2x - 5 = 0; [\text{vnejsi};]$
 3. $p : x - y - 1 = 0; y^2 - 2x + 3 = 0; [\text{tecna}; T[2; 1]]$
 4. $p : 2x - y + 4 = 0; 4x^2 - y^2 - 4 = 0; [\text{asymptota}; P[-\frac{5}{4}; \frac{3}{2}]]$

27. Určete, pro které hodnoty parametru k má daná přímka s kuželosečkou právě 2, 1, 0 společných bodů:

1. $p : y = kx; x^2 + 4y^2 - 6x + 1 = 0; [|k| < \sqrt{2} \text{ sec } na; = \text{tecna}; > \text{vnejsi}]$
 2. $p : y = kx - 2; x^2 - y^2 = 1; [|k| < \sqrt{5} \ \& \neq \pm 1 \text{ sec } na; = \text{tecna}; > \text{vnejsi}; |k| = \pm 1 \text{ asymptota}]$
 3. $p : y = kx - k; x^2 + y^2 + 2x = 0; [|k| < \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ sec } na; = \text{tecna}; > \text{vnejsi}]$
 4. $p : y = kx + 2; x^2 + 4y^2 = 16; [k = 0 \text{ tecna}; k \neq 0 \text{ vnejsi}]$

28. Rozhodněte, zda z bodu lze sestrojít tečny k dané kuželosečce:

1. $M[-8; 0]; y^2 + 3x + 4y - 8 = 0; [\text{nelze}]$

2. $M[3; 4]; x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 = 0; [lze]$
3. $M[1; -4]; 2x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0; [lze]$
4. $M[0; 0]; x^2 - y^2 + 4x + 3 = 0; [lze]$

29. Napište rovnice tečen, které lze sestrojít z bodu M k dané kuželosečce:

1. $M[0; 0]; x^2 + 2y^2 - 8x + 4y + 12 = 0; [y = -x; T[2; -2]; y = \frac{1}{5}x; T[\frac{10}{3}; \frac{2}{3}]]$
2. $M[0; -1]; (x - 2)^2 + y^2 = 1; [y = -1; T[2; -1]; y = \frac{4}{3}x - 1; T[\frac{6}{5}; \frac{3}{5}]]$
3. $M[-3; 0]; x^2 + y^2 - 2y = 0; [y = 0; T[0; 0]; y = \frac{3}{4}(x + 3); T[-\frac{3}{5}; \frac{6}{5}]]$
4. $M[1; -1]; y^2 - 4x + 2y + 9 = 0; [y = x - 2; T[3; 1]; y = -x; T[3; -3]]$

Analytická geometrie v prostoru

- Sestavte parametrické rovnice přímky p :
 - je určena bodem $A[3, -1, 2]$ a směrovým vektorem $s = (4, -1, 0)$;
 $p : x = 3 + 4t; y = -1 - t; z = 2$
 - je určena body $A[2, 0, 1], B[7, 1, -1]$; $p : x = 2 + 5t; y = t; z = 1 - 2t$
 - jestliže prochází bodem $M[2, -1, 3]$ a je rovnoběžná s přímkou
 $q : x = 1 - 2s; y = 3 + s; z = 3s$; $p : x = 2 - 2t; y = -1 + t; z = 3 + 3t$
- Je dána přímka $p: x = 2 - t, y = -1 + 2t, z = t$ a body $A[0, 1, 2], B[-1, 5, 3], C[4, c_2, c_3]$.
 - rozhodněte, který z bodů A, B leží na přímce p ; $B \in p$
 - Určete c_2, c_3 tak, aby $C \in p$; $c_2 = -5, c_3 = -2$
 - určete bod $D \in p$ jemuž přísluší hodnota parametru $t = -1$; $d[3, -3, -1]$
- Určete vzájemnou polohu přímky $p: x = 3 + 4t, y = 14 - 2t, z = 1 + t$ a přímky:
 - $a : x = -1 - 8s, y = 16 + 4s, z = -2s$; $p = a$
 - $a : x = 1 - 8s, y = 2 + 4s, z = 3 - 2s$; různé rovnoběžky
 - $a : x = 7 + 4s, y = 4s, z = 2s$; různoběžky $P[15, 8, 4]$
 - $a : x = 7 - 4s, y = 4s, z = 2s$; mimoběžky
 - $e = AB, A[1, -1, 2], B[-3, 33, -2]$ jsou-li přímky různoběžné, určete souřadnice jejich průsečíku. různoběžky $P[-1, 16, 0]$ A co odchylka?
- Určete odchylku přímk a, b :
 - $a : x = -2 + 3x; y = 1; z = 3 - t$; $b : x = -1 + 2s, y = 0; z = -3 + s$;
 - $a : x = 2 + 3t, y = -4t, z = 12t$; $b : AB, A[0, -3, -1], B[1, -6, 0]$
 - $a : x = 1 - t, y = 2 + 2t, z = t$; b splývá se souřadnicovou osou z
 - $a : x = t, y = 1 + t, z = t$; $b : x = 1 + s, y = -s, z = 1$
 - $a : x = -2t, y = 1 - 2t, z = -4 + t$; $b : AB, A[1, -1, 2], B[3, 1, 1]$;
 $\left[45; \cos a = \frac{27}{13\sqrt{11}}; 65^\circ 54', 90^\circ, 0 \right]$
- Napište obecnou rovnici roviny, která
 - prochází bodem $M[3, -2, 0]$ a má normálový vektor $n = (-1, 2, 3)$; $x - 2y - 3z - 7 = 0$
 - je rovnoběžná s rovinou $\sigma : 2x - y + z - 1 = 0$ a prochází $A[-3, 1, 2]$; $2x - y + z + 5 = 0$
 - prochází bodem $M[0, 1, 0]$ a je kolmá k přímce $p : x = 3 + 3t, y = -1 - 2t, z = 2$;
 $3x - 2y + 2 = 0$;
 - je kolmá k úsečce AB a prochází jejím středem; $A[1, 2, 3], B[3, -2, -5]$;
 $x - 2y - 4z = 0$
- Jsou dány body A, B, C . Rozhodněte, je-li jimi jednoznačně určena rovina, a v kladném případě sestavte její obecnou rovnici:
 - $A[5, -3, 1], B[1, 3, 2], C[-1, -2, 0]$; $7x + 10 - 32z + 27 = 0$
 - $A[1, -1, 3], B[2, 3, 5], C[3, 7, 7]$; jsou kolineární
 - $A[0, 1, 3], B[2, 0, -1], C[1, -2, 0]$; $9x - 2y + 5z - 13 = 0$
- Napište parametrické rovnice a obecnou rovnici roviny určené body:
 - $A[-1, 2, 0], B[2, 1, 3], C[0, 3, -2]$;
 $\rho = \{-1 + 3t + s, 2 - t + s, 3t - 2s\}; x - 9y - 4z + 19 = 0\}$
 - Napište obecné rovnice rovin $\rho = \{[1 - t + s, 2 + 2t, -1 - s]\}$,
 $\sigma = \{[2 + t + s, -7, -1 + s]\}$; $\rho = \{[2x + y + 2z - 2]\}$; $\sigma : x + 7 = 0$

8. Je dána přímka p a bod A . Ověřte, že je jimi jednoznačně určena rovina, a pak sestavte její obecnou rovnici:

1. $A[-1, 5, 1]; p: x = 2 - t, y = 1 + t, z = -1; 2x + 2y - z - 7 = 0$
2. $A[-1, 0, 1], p$ splývá se souřadnicovou osou $y; x + z = 0$

9. Ověřte, že přímkami $a = MN, M[2, 3, -1], N[1, 4, -3]$ a $b: \{[1 + t, -1 - t, 2 + 2t]\}$ je jednoznačně určena rovina a sestavte její obecnou rovnici. Přímky jsou rovnoběžné, $\rho: x - y - z = 0$;

10. Určete obecnou rovnici roviny ρ , která je rovnoběžná se souřadnicovou osou x a prochází body $A[-1, 0, 1], B[2, 3, 0]$. $\rho: y + 3z - 3 = 0$

11. Je dána rovina $\rho: 3x - y + z - 1 = 0$ a body $A[-1, 2, 7], B[1, 0, 3], C[2, 0, 0], D[0, 1, 2]$. Určete,

1. který z těchto bodů leží v rovině ρ ; D
2. které ze zbývajících bodů leží uvnitř téhož poloprostoru s hraniční rovinou ρ jako počátek soustavy souřadnic. Žádný

12. Určete vzájemnou polohu přímky p a roviny ρ :

1. $p: x = t, y = t, z = 1 + 3t; \rho: 2x + y - z + 1 = 0; p \subset \rho$
2. $p: x = 2 + t, y = 1 + 2t, z = 3 - t; \rho: 3x - y + z + 1 = 0; p // \rho; p \cap \rho = \emptyset$
3. $p: x = 1 - t, y = 2 + 3t, z = 1; \rho: 2x - y + z - 2 = 0; P[\frac{6}{5}; \frac{7}{5}; 1]$
 $p: AB, A[8, -6, 0], B[12, -9, 1]; \rho: 3x - 5y - z - 2 = 0$ je-li přímka p s rovinou různoběžná, určete souřadnice jejich průsečíku. $P[0, 0, -2]$ A co takhle odchylku? $[0, 0, 40^\circ 12', 59^\circ 32']$

13. Určete souřadnice paty P kolmice vedené bodem $A[2, 0, 3]$ k rovině $\rho: x - 3y + 5z + 18 = 0; P[1, 3, -2]$

14. Je dána přímka $p = \{[t, 1 - t, 2t]\}$ a bod $M[1, 0, 5]$. Určete společný bod přímky p a roviny ρ , která prochází bodem M a je kolmá na přímkou p . $P[2, -1, 4]$

15. Určete vzdálenost bodu M od roviny ρ , je-li:

1. $M[-7, 0, -1], \rho: 4x + 12y - 3z - 1 = 0; v = 2$
2. $M[-7, 3, -1], \rho: ABC, A[1, 0, 1], B[2, 2, 1], C[0, 0, 2]; v = \frac{23}{3}$

16. Určete hodnotu parametru d tak, aby vzdálenost bodu $A[0, 0, 3]$ od roviny $\rho: 2x - 2x + z + d = 0$ byla $v = 5$. $d = 12$ nebo $d = -18$

17. Zvolte vhodně soustavu souřadnic a určete vzdálenost bodu F od roviny BEG procházející

1. vrcholy krychle $A..H$ o délce hrany 1cm ; $[\frac{1}{3}\sqrt{3}]$
2. vrcholy kvádrů $A..H, AB = 3, BC = 4, AE = 5; [\approx 2, 16]$

18. Určete vzdálenost bodu M od přímky p , je-li:

1. $M[0, 1, -4]; p: \{[2 + t, 3, 2 - t]\}; [v = 6]$
2. $M[1, 0, 5]; p: AB, A[0, 1, 0], B[1, 0, 2]; [v = \sqrt{3}]$

19. Dána krychle A..H s hranou délky 1cm. M je středem hrany GH. Určete vzdálenost vrcholu A krychle od přímky BM. $[v = \frac{2}{3}\sqrt{2} \text{ cm}]$

20. Určete vzájemnou polohu rovin:

1. $\rho : 2x - y - z - 1 = 0; \sigma : -4x + 2x + 2z + 2 = 0; \rho = \sigma$
2. $\rho : 2x - y - z - 1 = 0; \sigma : 4x - 2y - 2z + 1 = 0; \rho // \sigma$ různé
3. $\rho : 2x - y - z - 1 = 0; \sigma : x + y + 2z - 3 = 0; \rho$ různoběžné
 $\rho : 20x + 10y + 2z + 3 = 0; \sigma : x + y + 2z - 3 = 0; \rho // \sigma$ různé
4. $\rho : 2x - y + z - 9 = 0; \sigma : ABC, A[0, 0, 3], B[-3, 0, 0], C[0, -3, 0]; \rho$ různoběžné

21. Určete parametrické rovnice průsečnice rovin:

1. $\rho : 2x - y - z - 1 = 0; \sigma : x + y + 2z - 3 = 0; \text{ např. } p = \{[t, -5 + 5t, 4 - 3t]\}$
2. $\rho : x + y - z + 3 = 0; \sigma : 2x - y + z - 9 = 0; \text{ např. } p = \{[2, -5 + t, t]\}$
3. $\rho : x - y + z - 1 = 0; \sigma : ABC, A[0, 0, 1], B[1, 0, 0], C[0, 1, 0]; \text{ např. } p = \{[t, 0, 1 - t]\}$

22. Určete odchylku rovin ρ, σ :

1. $\rho : x - y + 2z - 1 = 0; \sigma : 2x + y + z + 5 = 0, 60^\circ$
2. $\rho : 2x - 2y - 7 = 0, \sigma : KLM, K[2, -3, 2], L[0, -1, 0], M[1, 3, -4]; 60^\circ$
3. $\rho : x - 2y + 2z = 0; \sigma : \{1 - t - s, t, s\}; \text{ cca } 78^\circ 54'$
4. $\rho : x + y + 5 = 0; \sigma : \text{souřadnicová rovina } yz; 45^\circ$
5. $\rho : x - 2y + 3z = 0; \sigma : 3x - z + 1 = 0; 90^\circ$
6. $\rho : x - 2y + 3z - 6 = 0; \sigma : ABC, A[0, 0, 2], B[6, 0, 0], C[0, -3, 0]; 0^\circ \text{ splývají}$

23. Dány roviny ρ, σ, τ . Určete jejich průnik, počet průsečnic a jejich vzájemnou polohu:

1. $\rho : x + 2y + 3z - 4 = 0; \sigma : 2x + 3y + 4z - 5 = 0; \tau : 3x + 4y + 5z - 6 = 0; \text{ průnikem přímka } p = \{[-2 + t, 3 - 2t, t]\} - 3\text{splývající průsečnice}$
2. $\rho : x + 2y - 5z - 15 = 0; \sigma : 3x + 5y + 2z - 9 = 0; \tau : 3x + y - z - 7 = 0; 3 \text{ průsečnice se společným bodem } P[1, 2, -2]$
3. $\rho : x + y + z - 3 = 0; \sigma : x + y + z + 4 = 0; \tau : 2x + 2y + 2z - 10 = 0; \text{ žádná průsečnice}$
4. $\rho : x + y + z + 1 = 0; \sigma : 2x - y + z = 0; \tau : x + y + z - 1 = 0; 2 \text{ rovnoběžné průsečnice}$
5. $\rho : x - 3z + 10 = 0; \sigma : 5x - 6y - 7 = 0; \tau : 2y - 5z - 8 = 0; 3 \text{ rovnoběžné průsečnice}$

24. Napište rovnici roviny $A[1, 0, 2]; B[-1, 1, -2], C[3, 2, 0]$

25. Zjistěte, zda dané body leží v jedné rovině $A[1, 2, 3], B[-2, 5, 0], C[4, 1, 1], D[0, -3, 17]$. Buď zjistit, zda D leží v rovině předchozích, nebo není-li AD lineární kombinací předchozích.

26. Určete vzájemnou polohu rovin $\rho : x + 2y + z - 1 = 0; \sigma : 2x + 3y - 2z + 2 = 0 +$ parametricky průsečnici. $[p : x = -7t - 7, y = 4 - 4t, z = t]$

27. Dán čtyřstěn ABCD, $A[3, 1, -3], B[1, -4, -2], C[4, 2, -4], D[3, -2, 1]$. Vypočtěte:

1. vzdálenost bodu D od roviny ABC
2. odchylku přímek AB a CD
3. odchylku přímky CD a roviny ABC
4. odchylku rovin ABC a ABD

28. Dán bod $M[0, 2, -2]$ a roviny $\alpha : x + y + z - 6 = 0; \beta : x + y + z - 3$

1. ověřte, že dané roviny jsou rovnoběžné

2. určete jejich vzdálenost
 3. najděte obraz bodu M v souměrnosti podle roviny a
29. Najděte obecnou rovnici roviny ψ která prochází bodem $A[-2, 3, 8]$ a je kolmá k rovinám $\alpha : 7x - 5y + z + 13 = 0$; $\beta : 2x + y - 7z + 21 = 0$.
30. Jsou dány body $A[4, -1, 6]$, $B[1, -1, -3]$, $C[-2, 2, -3]$
1. vypočítejte obvod trojúhelníka ABC
 2. určete velikost největšího úhlu trojúhelníka ABC
 3. vypočítejte obsah trojúhelníka ABC
 4. vypočítejte objem čtyřstěnu $ABCD$, kde $D[0, 0, 0]$
31. Určete obraz bodu $M[4, -5, -10]$ v rovinové souměrnosti určenou rovinou ABC , $A[7, -2, -1]$, $B[-6, 1, -5]$, $C[10, -7, 1]$.
32. Určete obraz bodu $A[5, -6, 0]$ v osově souměrnosti podle přímky s parametrickým vyjádřením $p : x = 1 - 2t, y = 3 + t, z = -1 + 3t$
33. Napište rovnici kulové plochy, která má
1. střed $S[3, -2, 5]$ a prochází počátkem soustavy souřadnic
 2. střed $S[4, 3, -1]$ a dotýká se roviny $\rho : 2x + 6y + 3z + 5 = 0$
34. Napište rovnici kulové plochy, která prochází body $A[3, -3, 1]$, $B[0, -7, 0]$ a má střed na přímce $p : x = -1 + t, y = 3 - 2t, z = -t$
35. Napište rovnici kulové plochy procházející body $A[0, 0, 0]$, $B[-2, 1, -3]$, $C[-2, -6, 4]$, $D[1, 0, -1]$. Určete její střed a poloměr.
36. Vypočítejte objem čtyřstěnu $ABCD$, $A[1, 2, -1]$, $B[3, -1, 1]$, $C[1, 1, 3]$, $D[-1, 2, 0]$. [3]

Komplexní čísla

- komplexně sdružené číslo $z = a + bi$; $z^- = a - bi$
 - opačné $z = a + bi$; $z_{op} = -a + bi$
 - algebraický, goniometrický tvar
 - Moivreova věta; aplikace ($\cos 3x$, $\sin 3x$)
1. Jsou dána komplexní čísla $z_1 = 1$; $z_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Rozhodněte, zda platí:
 1. $z_1 + z_2 + z_3 = 0$; [ano]
 2. $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = 1$ [ano]
 2. Pro která reálná čísla t je $3i^3 - 2ti^2 + (1-t)i + 5$
 1. reálné [t=-2]
 2. ryze imaginární [$t = -\frac{5}{2}$]
 3. rovno nule; nikdy
 3. Co platí o komplexních číslech x , y , jestliže jejich součet a součin jsou současně reálná čísla? [že by komplexně sdružená, ale nevím, jestli to jsou všechna taková... :-)]
 4. Vypočtěte:
 1. $i \cdot i^2 \cdot i^4 \cdot i^6 \dots i^{36}$; [-i]
 2. $\frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^5} + \frac{1}{i^7} + \frac{1}{i^9}$; [0]
 5. Určete, pro která reálná čísla x , y platí rovnice $(2x - 3yi) \cdot (2x + 3yi) + xi = 97 + 2i$; [$x = 2$; $y = \pm 3$]
 6. Vypočtěte abs. hodnotu komplex. čísel:
 1. $(3 + 5i) \cdot (3 - 5i) = rovnou = 34$
 2. $-(1 + i)^2$; [2]
 3. $\log 100 + i \log 10$; [$\sqrt{5}$]
 7. Určete množiny bodů, které jsou obrazy komplexních čísel z , pro něž platí:
 1. $|z| = 2$
 2. $|z - 3| \leq 2$
 3. $|z - i| = |z + i|$
 4. $|z - (2 + 3i)| = |z|$
 5. $|z - (2 + 3i)| > |z|$
 6. * $|z - 1| + |z + 1| = 4$; elipsa
 7. $|\frac{z-2}{z-2i}| \geq 1$; bacha na $2i$, ale to v řešení stejně není, klidně i rozhodit abs. hodnoty a „vyjádřit“ holá z -ka a i -čka v rovnici, potom porovnat s odhadem.
 8. $1 \leq |z - 3 - i| \leq 2 \& |z - 5i| > |z - i|$
 8. Určete komplexně sdružené číslo k číslu: $(5 - 4i)(3 - 2i) - 3i(1 - i)$; [$4 + 25i$]
 9. Určete, pro která reálná čísla x , y budou komplexní čísla z_1, z_2 čísla komplexně sdruženými
 1. $z_1 = 5 + xyi$; $z_2 = x + y + 6i$
 2. $z_1 = 9y^2 - 4 - 10xi$; $z_2 = 8y^2 + 20i^7$
 10. Řešte rovnice v \mathbb{C} :

1. $|z + z^-| = |z - z^-|$; z^- je komplexně sdružené..
2. $z^-(z + 1) = |z + i|^2$; že by $z = 1$?

11. Vypočítejte: $(i + \frac{1}{1+i})^{-1} - (\frac{1}{1-i} - i)^{-1} =$; [2]

12. Určete absolutní hodnoty čísel komplexně sdružených k číslům

1. $\frac{5-2i}{2-3i}$; $[\pm \frac{5\sqrt{17}}{13} ?]$
2. $\frac{(1-2i)^2}{2-3i}$; $[\pm \frac{5\sqrt{13}}{13}]$

13. Dokažte, že platí: $\frac{\cos a + i \sin a}{\cos \beta + i \sin \beta} = \cos(a - \beta) + i \sin(a - \beta)$
 $\frac{(\cos a + i \sin a)(\cos \beta - i \sin \beta)}{1} = \dots$

14. Řešte rovnice v C:

1. $(5 - \frac{1}{i}) \cdot z^- + 2z = 22i$
2. $(5 - \frac{1}{i}) \cdot z^- = z(1 + i) + 12$

15. Řešte rovnici $(3 + 4i)x - (2 + 2i)x = 3 - 5i + ax$ s neznámou x a komplexním parametrem a . Pro která a nemá rovnice řešení? $[-1 + 2i]$. Určete x , je-li $a = -2 - 3i$.

16. Vypočítejte obsah čtverce ABCD, jehož vrcholy A, B jsou po řadě obrazy komplexních čísel $a = 3 - 2i$; $b = 1 + 4i$; [40]

17. Čtverec má střed v počátku soustavy souřadnic a jeden vrchol v bodě, který je obrazem komplexního čísla $a = x + yi$. Která komplexní čísla jsou zobrazena zbývajícími vrcholy čtverce? $[-x + yi; \pm x - yi]$.

18. Je dáno komplexní číslo $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Zjistěte, jaký útvar v rovině komplexních čísel tvoří obrazy čísel z ; z^2 ; z^3 ? [trojúhelník?]

19. Řešte rovnici v C: $z^2 - (5 + 2i)z + 21 + i = 0$; $[3 + 5i; 2 - 3i; zkouska!]$

20. Řešte rovnici v C: $z^3 - 1 - i = 0$; $[\sqrt[3]{2} (\cos \frac{\pi+2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi+2k\pi}{3})$; $k = 0, 1, 2]$

21. Řešte v C: $z^2 = 3 + 4i$; $[2 + i; -2 - i]$

22. Řešte rovnice v C:

1. $(5 - \frac{1}{i}) \cdot z^- + 2z = 22i$; $[1 \pm 7i]$
2. $(5 - \frac{1}{i}) \cdot z^- = z(1 + i) + 12$; $[z = 3]$

23. Dáno číslo $z = 3(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6})$

1. Vyjádřete v algebraickém tvaru; $[\frac{-3\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{6}i]$
2. Určete vzdálenost obrazů čísel z, z^-

24. Komplexním číslem v goniometrickém tvaru vyjádřete výraz:

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{2(1+i)} \cdot \frac{\cos a + i \sin a}{\cos a - i \sin a}$$

25. Pomocí Moivrovovy věty vypočítejte:

- $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^5; \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right]$
- $\left(\cos \frac{\pi}{24} + i \sin \frac{\pi}{24}\right)^6; \left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right]$

26. Použijte Moivrovu větu k určení hodnot $\sin 3x$, $\cos 3x$ pomocí hodnot $\sin x$, $\cos x$
 $(\cos x + i \sin x)^3 = \text{Moivr.} = \cos 3x + i \sin 3x = \text{umocnit a upravit Re a Im část a je to..}$

27. Řešte binomické rovnice v C a sestrojte obrazy jejich kořenů:

- $z^3 + 1 = 0$
- $z^4 - i = 0$

28. Řešte rovnice v C a sestrojte obrazy jejich kořenů:

- $(3x - 4)^4 = 625; z^4 = 625; \text{Moivr.}; \text{nebo rozložit?}$
- $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x = 15; \text{jedině odhad, jeden kořen bude } -1, \text{ vydělit...}$

29. Řešte rovnice v C :

- $z^2 - (5 + 2i)z + 21 + i = 0$
- $z + z^-(2 + i) = z \cdot z^-$

30. Zjistěte, pro která reálná m mají následující rovnice dva různé reálné kořeny a pro která dva imaginární:

- $(3 + m)x^2 - 3(6 - m)x + 5 - 18m = 0$
- $x^2 + 2(m - 1)x + 3m^2 + 5 = 0$

31. Rovnice $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2 = 0$ má kořen $x_1 = i$. Určete všechny její kořeny. [tak to má i kořen $x_2 = -i$, no, teď to děťátka pěkně vydělí $x^2 + 1$ a je to]; $[\pm i; 1 \pm i]$

32. Určete algebraické (polynomické) rovnice co nejnižšího stupně s reálnými koeficienty, jestliže jsou dány některé jejich kořeny:

- $x_1 = 1; x_2 = -1; x_3 = i$
- $x_1 = x_2 = 2; x_3 = i\sqrt{3}$

33. V Gaussově rovině zobrazte množinu všech čísel $z \in C$, pro která platí:

- $1 \leq |z - 3 - i| \leq 2 \& |z - 3i| = |z + i|$; klidně i trik s odstraněním abs. hodnot; dvě úsečky v mezikruží
- $\left|\frac{z-2}{z-2i}\right| \geq 1$; polorovina s hraniční přímkou $1+i$

34. V Gaussově rovině sestrojte obrazy komplexních čísel z :

- $|z + 1 - i| = |3 + 2i - z| = |z + 1|$
- $1 < |z - 1| \leq 3$
- $\log_2 |z| = 1$
- $z \cdot z^- - (z + z^-) + 1 = 0$
- $|z| = z + z^-$
- $\left|\frac{z-2}{z+2}\right| \geq 4$
- $|z - 1| \geq |z + 1|$

35. Řešte rovnice v C :

- $(1 - 2i) \cdot z = 2z^- - i(2 + i)$

2. $z^2 = z + z^{-1}$
3. $\frac{1+i}{i} - z = (1-i)(z-i)$
4. $z^{-1} = |z|$
5. $|z + z^{-1}| = |z - z^{-1}|$
6. $z^{-1}(z+1) = |z+i|^2; [0; -2; 2?really?]$
7. $z + z^{-1} = |z|.z$

36. Vypočtěte:

1. $\frac{2+i}{3-i}; \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$
2. $\frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i}; 2i$
3. $\frac{(1-i)^3}{(2+i)(1+2i)}; -0, 4 + 0, 4i$
4. $2i - 3i(1+2i)^2 - 4(2-4i); 4 - 27i$
5. $\frac{(1+i)^3}{2(1-i)}; -1$
6. $\frac{1}{i} + \frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i}; 1 - i$

37. Převeďte do algebraického tvaru:

1. $z = 7(\cos \frac{1}{6}\pi + i \sin \frac{1}{6}\pi); \frac{7}{2}\sqrt{3} + \frac{7}{2}i$
2. $z = 3\sqrt{2}(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi); [-3 + 3i]$
3. $z = 2\sqrt{3}(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi); [-\sqrt{3} - 3i]$
4. $z = 10(\cos \frac{11}{6}\pi + i \sin \frac{11}{6}\pi); [5\sqrt{3} - 5i]$

38. Následující komplexní čísla vyjádřete v goniometrickém tvaru:

1. $z = 3;$
2. $z = -2;$
3. $z = 2i;$
4. $z = 2 - 2i; [2\sqrt{2}(\cos 315^0 + i \sin 315^0)]$
5. $-1 + i\sqrt{3}; [2(\cos 120^0 + i \sin 120^0)]$
6. $z = -3\sqrt{2} - 3i\sqrt{2}; [6(\cos 225^0 + i \sin 225^0)]$
7. $z = 2\sqrt{3} + 2i; [4(\cos 30^0 + i \sin 30^0)]$

39. Užitím Moivreovy věty vypočtěte komplex. mocninu a výsledek zapište v algebraickém tvaru:

1. $z = (1+i)^{10}; [32i]$
2. $z = (-\sqrt{2} - i\sqrt{2})^4; [-16]$
3. $z = (-\sqrt{3} + i)^6; [-64]$
4. $z = (1-i)^5; [-4 + 4i]$

40. Vypočtěte a^5 ; $a = \frac{15-5i}{1+2i} - \frac{1-3i}{i} + (3+i)(-1+2i); [4 + 4i]$

41. Určete reálná x, y pro která platí:

1. $5 + xi = 2i - y; [x = 2; y = -5]$
2. $2x - 5i = 4 + yi; [x = 2; y = -5]$
3. $x(1-i) + 1 = -y + 3i; [x = -3; y = 2]$
4. $2x - i(2+i) = 4 - yi; [x = \frac{3}{2}; y = 2]$

42. Řešte v C:

1. $z.i = 1 + 2i; [2 - i]$
2. $z - 3 = i(1+z); [1 + 2i]$

3. $z \cdot i = 4 + 2i - z(1 - 2i); [1 + 3i]$
4. $2z^{-1} - 1 + i = z; [1 + \frac{1}{3}i]$
5. $2z + 2 + 3i = z^{-1} + i^2; [-3 - i]$
6. $z^{-1}(1 - i) = z \cdot i + 1 - 3i; [1 + i]$

43. Řešte v C:

1. $x^2 = 9; [-3; 3]$
2. $x^2 = -4; [-2i; 2i]$
3. $x^2 + 1 = 0; [-i; i]$
4. $2x^2 + 10 = 0; [\pm i\sqrt{5}]$

44. Řešte v C:

1. $x^2 + 4x + 5 = 0; [-2 \pm i]$
2. $4x^2 - 8x + 5 = 0; [1 \pm \frac{1}{2}i]$
3. $x^2 + 2x + 4 = 0; [-1 \pm i\sqrt{3}]$
4. $2x^2 + 4x + 5 = 0; [-1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{6}i]$

45. Napište kvadratickou rovnici s reálnými kořeny, jestliže je dán jeden její kořen:

1. $x_1 = 3 - 6i; [x^2 - 6x + 45 = 0]$
2. $x_1 = \frac{4i}{1-i}; [x^2 + 4x + 8 = 0]$
3. $x_1 = [(1-i)(i+2)]^3; [x^2 - 36x + 1000 = 0]$
4. $x_1 = (1+i)^2 \cdot i$; je reálný, takže druhý může být libovolné a: $(x+2)(x-a) = 0 \dots$

46. Řešte v C:

1. $x^3 = 1; [1; -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}i]$
2. $x^3 = -8; [-2; 1 \pm i\sqrt{3}]$
3. $x^4 = 81; [-3; 3; \pm 3i]$
4. $x^4 = -1; [\pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}i]$
5. $x^6 = 64; [\pm 2; \pm 1 \pm i\sqrt{3}]$
6. $x^6 = -1; [\pm i; \pm \frac{1}{2}\sqrt{3} \pm \frac{1}{2}i]$
7. $x^8 = 1; [\pm 1; \pm i; \pm \frac{1}{2}\sqrt{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}i]$
8. $x^5 = -32; [2[\cos(36^\circ + k \cdot 72^\circ) + i \sin(36^\circ + k \cdot 72^\circ)]; k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}]$

47. Řešte v C:

1. $x^2 = i; [\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i; -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i]$
2. $x^2 = -16i; [-2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}; 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}]$
3. $x^2 = 2 + 2i\sqrt{3}; [\sqrt{3} + i; -\sqrt{3} - i]$
4. $x^3 = -i; [i; -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i; \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i]$
5. $x^3 = 8i; [-2i; \pm \sqrt{3} + i]$
6. $x^6 = -64i; [2(\cos(45^\circ + k \cdot 60^\circ) + i \sin(45^\circ + k \cdot 60^\circ)); k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}]$
7. $x^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{3}; [\pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}i]$
8. $x^5 = 2 - 2i; [\sqrt[10]{8}(\cos(63^\circ + k \cdot 72^\circ) + i \sin(63^\circ + k \cdot 72^\circ)); k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}]$

48. Řešte v C:

1. $4x^2 - 8ix - 5 = 0; [\pm \frac{1}{2} + i]$
2. $x^2 - 6ix - 8 = 0; [2i; 4i]$
3. $x^2 - 2x - 2ix + 2i = 0; [1 + i]$
4. $x^2 + (5i - 3)x - 4 - 8i = 0; [1 - 3i; 2 - 2i]$

49. Řešte v \mathbb{C} :

1. $x^6 - 26x^3 - 27 = 0$; $\left[3; -\frac{3}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{3}i; -1; \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right]$
2. $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$; $\left[\pm 2; \pm 2i; \pm \frac{1}{2}\sqrt{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}i\right]$
3. $x^6 + 19x^3 - 216 = 0$; $\left[-3; \frac{3}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{3}i; 2; -1 \pm i\sqrt{3}\right]$
4. $16x^8 + 255x^4 - 16 = 0$; $\left[\pm \frac{1}{2}; \pm \frac{1}{2}i; \pm \sqrt{2} \pm \sqrt{2}i\right]$

50. V Gaussově rovině komplexních čísel znázorněte obrazy komplexních čísel, pro která platí:

1. $|z - 1 + i| = 5$; kružnice $k(S[1; -1]; r = 5)$
2. $|z + 2 - 3i| > 2$; vnější oblast kružnice $k(S[-2; 3]; r = 2)$
3. $|z + 3 + i| \leq 4$; kruh $K(S[-3; -1]; r = 4)$
4. $|z - 1| = |z - 3i|$; osa úsečky AB, $A[1; 0]; B[0; 3]$
5. $|z - 4 - i| \leq |z + 3i|$; polorovina, jejíž hraniční přímkou je osa úsečky AB, $A[3; -2]; B[-2; 0]$, která obsahuje bod A
6. $|z - 3 + 2i| > |z + 2|$; polorovina, jejíž hraniční přímkou je osa úsečky AB, $A[3; -2]; B[-2; 0]$, která obsahuje bod B, přičemž hraniční přímka do ní nepatří.

Hranol, jehlan

A. pravoúhlý trojúhelník, Eukleidovy věty, věta Pythagorova

B. Odychylky čehokoliv od čehokoli,

C. Příčka mimoběžek (bodem, směrem), osa mimoběžek?

D. Řezy:

- leží-li dva různé body v rovině, jejich přímka tam je taky. --- jsou-li dva body řezu na jedné stěně, jejich spojnice v průniku s touto stěnou je řez touto stěnou.
- dvě rovnoběžné roviny protíná různoběžná ve dvou rovnoběžných přímkách --- průsečnice roviny řezu se dvěma rovnoběžnými stěnami jsou rovnoběžné úsečky
- mají-li tři různoběžné roviny jediný průsečík, musí jím procházet všechny tři průsečnice

1. Určete objem pravidelného šestibokého hranolu $A..F'$, když délka tělesových úhlopříček $AD'=13$, $BD'=12$. $V=Sp.v$, buď pythagorovkama nebo pyth+kosinovka ($r=5$, $v = \sqrt{69}$).

2. Objem pravidelného 6 bokého hranolu $A..F'$ $V = \sqrt{3} \cdot 540cm^3$. Poměr podstavné hrany : výšce hranolu je $3 : 5$. $S = ?$ [$S = 54, 7cm^2$]

3. Je dána krychle $A..H$. Sestrojte průsečík přímky CE a roviny BDG .

4. Sestrojte řez krychle $A..H$ s rovinou XYZ , kde X je středem AD , Y je středem BF a bod Z je bodem hrany HG , když $|HZ|:|ZG|=1:3$.

5. Je dána krychle $A..H$. Najděte příčku mimoběžek AH a BF , která prochází dvěma vrcholy krychle.

6. Je dána krychle $A..H$. Najděte příčku mimoběžek AH a BF , která prochází

1. bodem M , který je středem EF
2. vrcholem D

7. Určete příčku mimoběžek krychle $A..H$, která je rovnoběžná s přímkou

1. CH
2. BC

8. Sestrojte řez krychle $A..H$ rovinou

1. MCH , M leží na prodloužení úsečky AD za bod A , $|MA|:|AD|=1:2$
2. BPQ , P je středem FG , Q leží na prodloužení EF za bod E , $|QE|:|EF|=1:3$
3. TRS , T je středem FG , R je bodem polopřímky AB , $|AR| = \frac{5}{4}|AB|$, S je bodem AE , $|AS| = \frac{3}{2}|AE|$

9. Sestrojte řez kvádrů $A..H$ rovinou, která prochází přímkou BG a je rovnoběžná s přímkou

1. CH
2. CP
3. CQ

přitom body P , Q jsou po řadě vnitřní body hran AD , EH

10. Body K , L , M , N jsou po řadě středy hran AB , AD , AE , GH krychle $A..H$. Bod P je bodem hrany BC , $|BP|:|PC|=1:2$. Sestrojte řez krychle rovinami

1. HKP
 2. LMN
 3. KLN
11. Dána krychle A..H. Sestrojte příčku mimoběžek EF a AC tak, aby
1. procházela dvěma vrcholy krychle
 2. ležela v rovině BDF
12. Je dán pravidelný pětiboký hranol A..E'm, jehož boční hrany jdou čtverce. Určete odchylku přímek
1. AB, DD' ; 90°
 2. AB, C'E' ; 0°
 3. AB, CD' ; cca 55°6'
13. Podstavou kolmého trojbokého hranolu A..C' je rovnoramenný trojúhelník ABC, $|AB|=3$, $|AC|=|BC|=4$, $|AA'|=4$. Určete konstrukčně i početně odchylku přímek
1. BA', BC' ; cca 43°33'
 2. A'B', BC ; cca 67°59'
 3. AB', BC ; cca 77°
 4. A'C, BC' ; cca 81°55'
14. Je dán pravidelný šestiboký hranol A..F', $|AB|=a=2,5$; $|AA'|=b=4$. Určete početně i konstrukčně odchylku přímek
1. DE', BD' ; kosinovka BA'D', cca 54°52'
 2. BC', CF' ; PCF' P průsečík EF a rovnoběžky s BC' proch. F' ; cca 71°10'
15. Vypočítejte výšku kolmého trojbokého hranolu s objemem 200cm^3 , jehož podstavné hrany mají délky $4\frac{1}{3}\text{cm}$, 10cm , $12\frac{1}{3}\text{cm}$; [10]
16. Odchylka delší tělesové úhlopříčky pravidelného 6bokého hranolu a roviny jeho podstavy je 60°, kratší tělesová úhlopříčka má délku 15. $V = ?$ $S = ?$ [$V = 135\sqrt{15}$; $S \approx 225\sqrt{3}$]
17. Délky hran čtyřbokého hranolu jsou v poměru $a : b : c = 2 : 4 : 5$. Povrch je 57. Určete jeho objem. [$15\sqrt{3}$]
18. Vypočítejte objem a povrch pravidelného šestibokého hranolu. Délka podstavné hrany je 4, výška hranolu je 6. [$V = 144\sqrt{6}$; $S = 48\sqrt{3} + 144$]
19. Vypočítejte délku podstavné hrany pravidelného pětibokého hranolu, jehož výška je stejná jako délka podstavné hrany. Objem hranolu je 100. [3, 9]

Jehlan

Jehlan

$$V = \frac{Pv}{3}; S = P + Q$$

Komolý jehlan:

$$V = \frac{v}{3}(P_1 + \sqrt{P_1P_2} + P_2); S = P_1 + P_2 + Q \text{ (lichoběžníku)}$$

20. Určete objem trojbokého jehlanu, podstava trojúhelník ABC, $a = 9, b = 10, c = 17$ jehož pobočné hrany jsou stejně dlouhé $h = 20$. [$S = 36, V = \dots$]

21. V pravidelném trojbokém jehlanu je odchylka boční stěny a roviny podstavy 45° . Určete odchylku boční hrany a roviny podstavy. [$26^\circ 36'$]

22. Vypočtete objem a povrch nádoby bez víka tvaru pravidelného komolého čtyřbokého jehlanu jehož dolní podstavná hrana $a = 24$, horní podstavná hrana $b = 36$ a boční hrana má délku 36. [$V \approx 47,2; S \approx 57,4$]

23. Je dán pravidelný čtyřboký jehlan A..V. Body M, N jsou po řadě středy hran BV a CV. Sestrojte průsečnici rovin

1. ACV, BDN
2. ABN, CDM

24*. Je dán pravidelný čtyřboký jehlan A..V, bod S střed jeho podstavy. Sestrojte příčku mimoběžek AB a CV tak, aby obsahovala

1. střed M hrany BV
2. střed N úsečky SV

25. Zobrazte pravidelný čtyřboký jehlan A..V.

1. Sestrojte jeho řez ABMN rovinou ABM, kde M je střed CV
2. určete průsečnici p rovin BCV a ADV

26. Pravidelný čtyřboký jehlan, jehož stěny jsou rovnoramenné trojúhelníky. Bod S je středem podstavy, P středem hrany AV. Určete odchylku přímek

1. BC, SV; 90°
2. AB, CV; 60°
3. AD, CV; 60°
4. BV, CP; $77^\circ 5'$
5. SV, BP; $65^\circ 54'$

27. Výška pravidelného 4 bokého jehlanu A..V je rovna délce jeho podstavné hrany.

Vypočtete odchylku rovin dvou

1. protějších stěn; $53^\circ 8'$
2. sousedních stěn; $78^\circ 28'$

28. Bod M je středem hrany AV pravidelného šestibokého jehlanu A..FV, $|AB|=a, v=2a$.

Určete vzdálenost bodu M od přímky

1. AB; $\left[\frac{\sqrt{19}}{4}a \right]$
2. CV; $\left[\frac{1}{4}a\sqrt{\frac{51}{5}} \right]$

29. Pravidelný čtyřboký jehlan má podstavnou hrana $a = 20$ a boční hrana $b = 26$. Vypočtete $v = ?$, odchylku bočních hran a roviny podstavy a odchylku bočních stěn a roviny podstavy. [$v = 21,8; \alpha = 57^\circ 3'; \beta = 65^\circ 23'$]

30. Délka podstavných hran pravidelného 9bokého jehlanu $a = 2$, délka bočních hran $b = 10$. $v = ?$ [9, 56]

31. Délka všech hran pravidelného čtyřbokého jehlanu je 36 cm. Vypočítejte jeho V a S.
[$V = 7776\sqrt{2}$; $S = 1296(1 + \sqrt{3})$]

32. Jednou podstavou komolého jehlanu A..C' je trojúhelník ABC, a=60, b=52, c=40. Délka podstavy a' = 45. Výška jehlanu je v = 80. V=? ; [$V = 5920\sqrt{114}$]

33. Jáma má tvar pravidelného čtyřbokého komolého jehlanu o podstavních hranách 10 a 14m, roviny bočních stěn a rovina podstavy mají odchylku 45°. Kolik m^3 bylo Vykopáno?
[291]

34. Vypočítejte objem a povrch pravidelného šestibokého jehlanu, je-li délka podstavné hrany 3 a boční hrany 6. [$S = \frac{27}{2}(\sqrt{3} + \sqrt{15})$; $V = 40,5$]

35. Vypočítejte objem a povrch pravidelného čtyřbokého jehlanu, je-li obsah podstavy 20, odchylka boční stěny od roviny podstavy je 60°. [$V = \frac{20}{3}\sqrt{15}$; $S = 60$]

36. Pravidelný komolý čtyřboký jehlan má podstavné hrany délek 6 a 4. Boční stěna svírá s rovinou podstavy úhel 60°. Vypočítejte objem a povrch. [$V = \frac{76}{3}\sqrt{6}$; $S = (52 + 20\sqrt{7})$]

Rotační tělesa, kužel, komolá tělesa

Kužel

$V = \frac{\pi r^2}{3} \times v$; $S = \pi r^2 + \pi r s$; kde s je strana kužele

Komolý kužel

$V = \frac{v}{3} (\pi r_1^2 + \sqrt{\pi r_1^2 \cdot \pi r_2^2} + \pi r_2^2) = \frac{\pi v}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$; $S = \pi [r_1^2 + r_2^2 + (r_1 + r_2) \cdot s]$

1. Povrch kužele je $90\pi\text{cm}^2$. Objem je $100\pi\text{cm}^3$. Vypočítejte odchylku jeho strany od podstavy. [$r = 5, v = 12, s = 13, a = \dots$]
2. Vypočítejte V původního tělesa-kužele, jsou-li rozměry komolého kužele $r_1 = 4, r_2 = 8, v = 5$. [$V = \pi \cdot 64 \cdot 10$]
3. Pravidelnému čtyřbokému jehlanu je opsán kužel. Urči poměry pláštěů. $\left[\frac{2\sqrt{3} a}{\sqrt{2} \pi} ? \right]$
4. Pravoúhlý trojúhelník s přeponou $c=5$ a obsahem $S=6$ se otáčí kolem přepony. Určete V a S vzniklého rotačního tělesa. [$V = \frac{48}{5}\pi; S = 52, 8$]
5. Rotační komolý kužel má poloměry podstav $r_1 = 17, r_2 = 5$ a jeho strana má od roviny podstavy odchylku 60° . Určete V a S . [$V = 8684, 5; S = 2645, 2$]
6. Osovým řezem rotačního kužele je rovnoramenný trojúhelník $S=1600$, s úhlem při hlavním vrcholu 30° . Vypočítejte výšku, délku strany a poloměr podstavy kužele. [$v = 77, 3; s = 80; r = 20, 7$]
7. Komolý rotační kužel má podstavy s průměry 250 a 86 a výšku 110. Vypočítejte délku jeho strany a odchylku strany a roviny podstavy. [asi $137,2; 53^\circ 18'$]
8. Hromada písku má tvar rotačního kužele s výškou 3,30m a obvodem podstavy 18,85m. Kolik m^3 písku je v hromadě? [31, 1]
9. Jak veliký je středový úhel v rozvinutém plášti rovnostranného kužele? [180°]
10. Kmen tvaru komolého rotačního kužele je 3m dlouhý, na tlustším konci má obvod 0,9m, na tenčím 0,6m. Má se z něho vytesat trám čtvercového průřezu, který je shodný se čtvercem vepsaným do menší podstavy. Vypočítejte objem odpadu. [$0,081m^3$]
11. Vypočítejte objem a povrch pravidelného rotačního kužele o výšce 10, jehož strana má od roviny podstavy odchylku 30° . [$V = 1000\pi; S = 100\pi(3 + 2\sqrt{3})$]
12. Komolý kužel ($r_1 = 4; r_2 = 2; v = 6$) je rozdělen rovinou rovnoběžnou s podstavou na dvě části stejného objemu. Vypočítejte:
 - poloměr kružnice, která je řezem [3, 3cm]
 - poměr, ve kterém rovina řezu dělí výšku; [1, 185]

13. Vypočítejte poloměr podstavy a objem rotačního kužele, jestliže rozvinutý plášť je kruhová výseč s poloměrem 3cm a se středovým úhlem 120° . $[r = 1; V = \frac{2}{3}\pi\sqrt{2}]$

Válec

14. Rotační válec má $S = 20\pi dm^2$. Úhlopříčka jeho osového řezu je 5 dm. $V = ?$ $[5\sqrt{5}\pi; 12\pi]$.

15. Osový řez rotačního válce je obdélník s úhlopříčkou 39. Poměr S podstavy : S pláště = 3 : 5. $S = ?$ $V = ?$ ($r=18, v=15, \dots$)

16. Rotační válec má $S = 20\pi$; úhlopříčka jeho osového řezu je 5. ($v^2 + 4r^2 = 25$).
 $V_1 = 5\sqrt{5}\pi; V_2 = 12\pi$

17. Osový řez rotačního válce je obdélník s úhlopříčkou 39 cm. Poměr S podstavy : S pláště = 3 : 5. $S, V = ?$ $[r = 18, v = 15, S = \dots, V = \dots]$

18. Dva rotační válce mají výšky 64 a 27. Plášť každého z nich má stejný obsah jako podstava druhého válce. V jakém poměru jsou objemy válců? $[4 : 3]$

19. Vypočítejte objem šikmo seříznutého rotačního válce s průměrem podstavy 30cm, mají-li jeho nejdelší a nejkratší strana délky 1,25 m a 1,05m. $[V = 25875\pi cm^3 = 81,3 dm^3]$

20. Osový řez rotačního válce je obdélník s úhlopříčkou 39 cm. Poměr S podstavy : S pláště = 3 : 5. $S, V = ?$ $[r = 18, v = 15, S = \dots, V = \dots]$

21. Určete rozměry válcové nádoby o objemu 51, jestliže výška nádoby se rovná polovině průměru podstavy. $[v = r = \sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}]$

22. Osovým řezem válce je obdélník s úhlopříčkou délky 20cm. Výška válce je dvakrát větší než průměr podstavy. vypočítejte objem válce v litrech. $[V = 160\pi\sqrt{5} = 1,1l]$

23. Osovým řezem válce je čtverec o obsahu $25cm^2$. Vypočítejte povrch válce. $[S = \frac{75}{2}\pi]$

24. Určete rozměry rovnostranného válce o objemu 11. $[r = \sqrt[3]{\frac{1}{1\pi}} dm; v = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}} dm]$

Koule, kulová plocha

$V_k = \frac{4}{3}\pi r^3; S_k = 4\pi r^2$. Koule celá, kulová plocha je slupka.

Části kulové plochy

Kulový vrchlík; kulový pás ... $S_{v,p} = 2\pi r v$;

Části koule

Kulová úseč $V_{\hat{u}} = \frac{\pi v}{6}(3\rho^2 + v^2)$; $V_{\hat{u}} = \frac{1}{3}\pi v^2(3r - v)$; kulová vrstva $V_v = \frac{\pi v}{6}(3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + v^2)$

Podle Euklidovy věty o výšce je $\rho^2 = (2r - v) \cdot v$; $2rv = \rho^2 + v^2$

$$\text{Kulová výseč (úseč+kužel)} = \frac{2}{3}\pi r^2 v$$

25. $V=850$; v vrchítku $=5\text{cm}$, r koule? $\left[r = \frac{\rho^2+25}{10}?\right]$

26. Koule o $r=15\text{cm}$ leží na vodorovné podložce, světelný kužel ve vzdálenosti 45cm od podložky. Urči povrch osvětlené plochy. [Eukl. o odvěsně $15^2 = (15 - v)(45 - r)$].

27. Odvoďte vzorec pro výpočet V kulové výseče

$$V \text{ výseče} = V \text{ kužele} + V \text{ úseče}$$

$$V \text{ výseče} = \frac{1}{3}\pi\rho^2(r - v) + \frac{1}{3}\pi v^2(3r - v); \rho^2 = 2rv - v^2$$

$$V = \frac{2\pi r^2 v}{3}$$

28. Kolik km^2 uvidím z výšky 10km nad zemí? $r=6378\text{km}$. $\left[S = 2\pi r \cdot \frac{rh}{r+h}\right]$

29. Polokoule o poloměru r je plná vody. Nakloníme-li ji o 30° , vyteče z ní $3,31$ vody. Kolik litrů vody v ní zůstane? [1,51]

30. Vypočítejte V a S kulové výseče, má-li kulová úseč, která je částí výseče, poloměr podstavu $r_1 = 6$ a výšku $v = 2$. [$V = 419$; $S = 314, 16$]

31. Ve vzdálenosti 10cm od středu koule s poloměrem $r=20$ ved'te rovinu řezu. Vypočítejte poloměr řezu. [$10\sqrt{3} \text{ cm}$]

32. Jakou délku zemského poledníku představuje 1° zeměpisné šířky? [111km]

33. Kolik km^2 leží v mírném pásu na severní polokouli (mezi $23^\circ 27'$ a $66^\circ 18'$ severní šířky)? $r=6378\text{km}$. [132 300 000]

34. Jak vysoko musí být letec, aby viděl $0,001$ zemského povrchu? [12,7km]

35. Kolik metrů vlny je asi v klubku s průměrem 9cm , jestliže průměr vlákna vlny je $1,5\text{mm}$? [216m]

36. Dokažte, že povrch koule, která se dotýká všech hran krychle, se rovná rozdílu povrchu koule opsané a vepsané této krychli.

37. Dutá niklová koule má vnější průměr 40cm a hmotnost 264kg . Určete její vnitřní průměr, je-li hustota niklu $9000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. [$d = 0, 2\text{m}$]

38. Nádobu tvaru válce s poloměrem dna 3cm je zcela naplněna vodou. Určete:

1. kolik vody z ní vytlačí koule o poloměru 5cm polžená na válec

2. povrch smáčené části koule

$$[14, 7\text{cm}^3; 31, 4\text{cm}^2]$$

39. Pomocí integrálního počtu odvoďte vzorec pro objem koule o poloměru r .

40. Pomocí integrálního počtu odvoďte vzorec pro objem kulové úseče o výšce v a kouli o poloměru r .

41. Kolik procent zemského povrchu leží v oblasti
1. pásma tropického (obratník... $\varphi=23^{\circ}27'$); [39,8%]
 2. pásma mírného (polární kruh... $\varphi=66^{\circ}33'$); [51,9%]
 3. pásma polárního; [8,3%]
 4. mezi desátou a dvacátou rovnoběžkou na severní polokouli?; [16,8%]
(poloměr Země = 6378km)
42. Jakou část zemského povrchu vidíme z výšky 350km nad Zemí? [13,3mil km²; 2,6 %]
43. Do krabice tvaru kvádrů se čtvercovou podstavou o straně $a=6$ a výškou $v=4$ dáme kouli o $r=3$. Vypočítejte objem kulového vrchlíku, který leží vně kvádrů. [12 π]
44. Krychli opište a vepište kouli. Vypočítejte poměr objemů koule opsané, krychle a koule vepsané. [3 $\pi\sqrt{3}$: 6 : π]
45. Vypočítejte poloměr a výšku rovnostranného válce, který lze vepsat do koule o $r=6$. Vypočítejte, kolik procent z objemu koule zaujímá objem válce. [$r = 3\sqrt{2}$; $v = 6\sqrt{2}$; 53%]
46. Vypočítejte poloměr koule vepsané do kužele, jehož výška je 6 a poloměr podstavy $r=2$. Potom vypočítejte, kolikrát je objem kužele větší než objem koule vepsané. [$\frac{2(\sqrt{10}-1)}{3}$; 2 V_{koule}]
47. Vypočítejte poloměr koule vepsané do pravidelného čtyřbokého jehlanu, jehož délka podstavné hrany je $a=4$ a výška $v=6$. Potom vypočítejte, kolikrát je objem jehlanu větší než objem koule vepsané. [$\frac{2(\sqrt{10}-1)}{3}$; 2,6 V_{koule}]
48. Vypočítejte délku hrany krychle vepsané do polokoule o poloměru $r=6$. Kolik procent zaujímá objem krychle z objemu polokoule? [$a = 2\sqrt{6}$; 26%].
49. Vypočítejte délku hrany krychle vepsané do polokoule o poloměru 6. Kolik procent objemu polokoule zabírá krychle? [$a = 2\sqrt{6}$; 26%]

Kombinatorika

Záleží, nezáleží na pořadí

Faktoriál

variace s opakováním a bez

permutace a kombinace bez opakování

Permutace s opakováním $P(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{(k_1+k_2+\dots+k_n)!}{k_1!k_2!\dots k_n!}$

Kombinace s opakováním $C = \binom{n+k-1}{k}$ k-1 přihrádek pro k-tice n předmětů

Pravidla pro kombinační čísla: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$; $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

1. Vypočtete

1. $\frac{7!}{5!}$
2. $\frac{7!+5!}{5!}$
3. $\frac{5!6!}{7!}$
4. $\frac{8!}{5!3!}$

2. Pro přípustné hodnoty n zjednodušte:

1. $\frac{n!}{(n-1)!} = n$
2. $\frac{n!(n+1)!}{(n-1)!(n+2)!} = \frac{n}{n+2}$
3. $\frac{(n+1)!}{n!} - \frac{n!}{(n-1)!} = 1$
4. $\frac{0!}{n!} - \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{(n-2)!} = \frac{1-n^2}{n!}$

3. Dokažte, že pro všechny přípustné hodnoty n platí.

1. $(n+1)! - n.n! = n!$
2. $n! + n^2.(n-1)! = (n+1)!$

4. V Z řešte rovnice:

1. $(5!)^x = (4!)^x$; [0]
2. $\frac{(x+6)!}{(x+4)!} + x^2 - 16x = 28$; [2]
3. $x \cdot \frac{(x+3)!}{(x+2)!} + x^2 = 14$; [2]

5. Porovnejte čísla a, b, je-li $a = 50! + 53!$, $b = 51! + 52!$; $[a > b]$

6. Vypočtete

1. $\binom{7}{2} = 21$
2. $\binom{8}{3} = 56$
3. $\binom{121}{120} = 121$
4. $\binom{n+2}{n} = \frac{1}{2}(n^2 + 3n + 2)$
5. $\binom{n+1}{n-1} = \frac{1}{2}(n^2 + n)$

7. Zapište Pascalův trojúhelník s komb. čísly $\binom{n}{k}$, $0 \leq n \leq 8$

8. Jediným kombinačním číslem vyjádřete tyto součty

1. $\binom{10}{4} + \binom{10}{5} = \binom{11}{5}$
2. $\binom{13}{2} + \binom{13}{10} = \binom{14}{3}$
3. $\binom{20}{7} + \binom{20}{8} = \binom{21}{8}$

$$4. \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{7}{5} = \binom{8}{5}$$

9. V N řešte rovnice:

$$1. \binom{9}{4} \cdot x = \binom{10}{5}$$

$$2. \binom{x}{2} + \binom{x-1}{2} = 4$$

$$3. \binom{x}{2} + \binom{x+3}{2} = 4$$

$$4. \binom{x-1}{x-3} + \binom{x-2}{x-4} = 9$$

10. V N řešte nerovnice

$$1. \binom{x}{2} + \binom{x+3}{2} + \binom{x+6}{2} < 100$$

$$2. \binom{x+2}{2} \geq \binom{x}{2} + 1$$

11. Vypište všechny dvoučlenné variace s opakováním ze tří prvků a, b, c [9]

12. Určete počet všech čtyřciferných čísel složených pouze z číslic 1, 3, 5, 8, 9 [625]

13. Kolik různých pěticiferných čísel lze sestavit z číslic 2 a 5? [32]

14. Kolik telefonních čísel s předvolbou 723 lze zapojit, jsou-li všechna telefonní čísla šesticiferná? Nulu na prvním místě nepřipouštíme. [999999 – 99999 = 900000]

15. V N řešte rovnice:

$$1. V(2, x) - x \cdot V(2, 2) = 20$$

$$2. x \cdot V(2, 3) = 10 - V(2, x)$$

$$3. V(2, x) - x \cdot V(2, 3) = 10$$

16. Z kolika prvků lze je možné sestavit 420 dvoučlenných variací bez opakování? [21]

17. Zvětšíme-li počet prvků o dva, zvětší se počet permutací dvanáctkrát. Určete původní počet prvků. [2]

18. Kolik trojiciferných čísel lze sestavit u číslic 1, 2, 3, 4, 5 jestliže se žádná číslice neopakuje? [60]

19. Kolika způsoby lze rozsadit pět hostů do pěti křesel stojících v jedné řadě? [120]

20. Kolik uspořádaných čtveřic lze vytvořit u osmi různých prvků, jestliže se v nich žádný prvek neopakuje? [1680]

21. Určete počet prvků, z nich lze vytvořit 66 dvoučlenných kombinací. [12]

22. Zvětší-li se počet prvků o 1, zvětší se počet tříčlenných kombinací z nich vytvořených o

21. Kolik je dáno prvků? [7]

23. Ve skladu je 10 výrobků, mezi nimi jsou 3 vadné. Kolika způsoby z nich můžeme vybrat kolekci pěti výrobků tak, aby:

a. všechny byly dobré [21]

b. byl právě jeden vadný [105]

c. byl nejvýš jeden vadný [126]

- d. byl aspoň jeden vadný [231]
24. Kolik hráčů se zúčastnilo turnaje ve stolním tenisu, jestliže bylo odehráno 21 zápasů a hráči hráli každý s každým pouze jednou? [7]
25. Kolik přímek je určeno šesti body, jestliže:
- žádné tři z nich neleží na přímce [15]
 - tři body leží na jedné přímce [13]
26. Kolik různých pěticiferných čísel lze sestavit z číslic 0, 2, 3? [162]
27. Kolik různých čísel lze sestavit z číslic 1, 3, 4, 6 za předpokladu, že se
- každá číslice může vyskytnout v zápise čísla jen jednou [64]
 - čísllice v zápise čísla mohou opakovat číslo je nejvýše čtyřciferné? [340]
28. Pokuste se odvodit počet úhlopříček v n -úhelníku $[\frac{1}{2}n(n-3)]$
29. Určete počet všech čtyřciferných čísel dělitelných čtyřmi, v nichž se vyskytují pouze číslice 1, 2, 3, 4, 5 [125]
30. Určete počet všech trojiciferných čísel, která jsou tvořena z číslic 0, 2, 5, 7, jsou dělitelná 9, přičemž číslice v čísle se mohou opakovat [7]
31. Máme 27 lidí, z toho 10 žen. Kolika způsoby je lze seřadit, aby nejdříve stáli muži a pak ženy. $[10! \times 17!]$
32. Řešte rovnice
- $\binom{x-2}{x-4} + \binom{x-3}{x-5} = 16$; [7]
 - $\binom{x}{2} + \binom{x-1}{x-3} = \binom{6}{4} + \binom{4}{0}$; [5]
 - $\binom{10}{1}\binom{x}{x-2} - \binom{x+3}{x+1} = 15\binom{x}{0}$; [3]
33. Řešte rovnice
- $\binom{x-1}{x-3}\binom{x-1}{2} - 4\binom{x-1}{x-3} + 3 = 0$; [3; 4]
 - $\binom{x+1}{x-1}\binom{x+1}{2} - 9\binom{x+1}{2} + 18 = 0$; [2; 3]
- P', C'
34. Ze 7 kuliček, z nichž jsou 4 modré (navzájem nerozlišitelné), jedna bílá, jedna červená a jedna zelená máme vybrat a položit vedle sebe pět kuliček. Kolika způsoby to lze provést? $[3\frac{5!}{4!} + 3\frac{5!}{3!} + \frac{5!}{2!}]$
35. V novinovém stánku je ke koupi deset druhů pohledů, každý druh je k dispozici v padesáti exemplářích. Určete, kolika způsoby lze zakoupit:
- 15 pohledů; $C(15, 10) = \binom{24}{15}$
 - 51 pohledů; $C(51, 10) - 10$
 - 8 různých pohledů; $C(8, 10) = \binom{10}{8} = 45$
36. V sadě 32 karet je každá z následujících karet čtyřikrát: 7ka, 8ka, ..., eso. Karty téže hodnoty jsou rozlišeny barvami červená, zelená, kule a žaludy. Určete, kolika způsoby lze vybrat čtyři karty, jestliže se

1. rozlišují pouze „barvy“ jednotlivých karet; $C(4, 4) = \binom{4}{4}$
2. rozlišují pouze hodnoty jednotlivých karet; $C(4, 8) = \binom{11}{4}$

Variace, permutace, kombinace s opakováním - ukázat principy (aby poznali kdy co) - kašlat na vzorečky, Harbichovy finty :-)

37. V krabičce je 10 pastelek, z toho 4 stejné červené, 3 stejné modré, 2 stejné žluté a jedna zelená. Kolika způsoby lze pastelky v krabičce uspořádat? [12600]

38. Kolika způsoby lze koupit v prodejně 5 sešitů, mají-li tři druhy sešitů v dostatečném množství? [21]

39. V cukrárně mají pět druhů dortů v dostatečném množství. Kolika způsoby si můžeme koupit 8 dortů? [495]

Aritmetická posloupnost

Vzorec pro n-tý člen resp. rekurentně zadané

1. Napište prvních šest členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dané vzorcem pro n-tý člen:

1. $a_n = 2n - 3; -1, 1, 3, 5, 7, 9$
2. $a_n = -n + 2;$
3. $a_n = 2^n - n;$
4. $a_n = (-2)^n;$
5. $a_n = \frac{n+1}{n}; 2, ..$
6. $a_n = 2^n - 3; -1, 3, 5, 13, 29, 61$

2. Určete prvních šest členů posloupnosti a_n je-li dána rekurentně:

1. $a_1 = -2; a_{n+1} = 2a_n - 1; -2, -5, -11, -23, -47, -95$
2. $a_1 = 7; a_{n+1} = -a_n + 3; 7, -4, 7, -4, 7, -4$
3. $a_1 = 1; a_2 = -2; a_{n+1} = -2a_n + a_{n-1}; 1, -2, 5, -12, 29, -70$
4. $a_3 = 5; a_{n+1} = a_n - 3; 11, 8, 5, 2, -1, -4$
5. $a_3 = 0; a_4 = -3; a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}; \frac{3}{4}, -\frac{3}{2}, 0; -3; -3; -9$

3. Rekurentním vzorcem určete posloupnost:

1. $(n^0)_{n=1}^{\infty}; a_{n+1} = a_n; a_1 = 1$
2. $(3^n)_{n=1}^{\infty}; a_{n+1} = 3a_n; a_1 = 3$
3. $(2n+1)_{n=1}^{\infty}; a_{n+1} = a_n + 2; a_1 = 3$
4. $(\log x^n)_{n=1}^{\infty}; x > 0; a_{n+1} = a_n + \log x; a_1 = \log x$

4. Určete, která z daných posloupností je aritmetická resp. geometrická, potom určete d, q

1. $(3n-4)_{n=1}^{\infty};$ ap. $d=3$
2. $(2^{n+1})_{n=1}^{\infty};$ gp. $q=2$
3. $(3 \cdot 2^{-n})_{n=1}^{\infty};$ gp. $q = \frac{1}{2}$
4. $(\frac{n+1}{n+2})_{n=1}^{\infty};$ ani ap. ani gp.

5. Napište prvních 5 členů aritmetické posloupnosti

1. $a_1 = 5; a_2 = 2; 5, 2, -1, -4, -7; s_{10} = -85$
2. $a_1 = 2; a_2 = 2 + \sqrt{5}; [2, 2 + \sqrt{5}, 2 + \sqrt{5}; 2 + 3\sqrt{5}, 2 + 4\sqrt{5}; s_{10} = 5(4 + 9\sqrt{5})]$
3. $a_2 = 7; d = -3; [10, 7, 4, 1, -2; s_{10} = -35]$
4. $a_3 = 1; a_7 = -7; [5, 3, 1, -1, -3; s_{10} = -40]$
5. $a_1 + a_6 = 16; a_3 + a_4 = 19;$ neexistuje
6. $a_1 + a_4 = 26; a_2 + a_5 = 30; [10, 12, 14, 16, 18, s_{10} = 190]$

6. V aritmetické posloupnosti:

1. je-li dáno $a_1 = 2; a_n = 32; s_n = 187;$ určete n, d; $n = 11, d = 3$
2. je dáno $a_1 = 0; d = 3; s_n = 165;$ určete n $n = 11$
3. je dáno $a_4 = 0; a_6 = -4; s_n = 12;$ určete n; $n = 3; n = 4$

7. Číslo 55 rozložte na součet několika čísel tak, aby každé následující bylo o 4 větší než předcházející a poslední bylo 19. $3 + 7 + 11 + 15 + 19$

8. Délky stran pravoúhlého trojúhelníka tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Delší odvěsna má délku 24cm. Určete délky zbývajících stran. $[18; 30cm]$

9. Teploty Země přibývá směrem do jejího středu o 1°C na 33 m. Jaká je teplota na dně dolu 1015 m hlubokého, je-li v hloubce 25 m teplota 9°C ? [39°C].

10. Součet prvních 8 členů ap. celých čísel je 64. Znásobíme-li 8. člen součtem všech členů předcházejících dostaneme 735. Vypište těchto prvních 8 členů. [1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15]

11. Pro která reálná y jsou výrazy $\log 2^x$, $\log(2^x + 1)$, $\log(2^x + 3)$ 3 po sobě následující členy ap. Určete 4. člen.

12. Je dáno $s_4 = 6$; $s_6 = 27$; $s_n = 162$; $n = ?$; [$a_1 = -1$, $d = 3$, $n = \dots$]

13. $a_3 + a_5 = 2$; $\frac{a_7}{a_4} = 7$; $a_3 = -1$, $a_5 = 3$, $a_4 = 1$; $a_7 = 7$

14. Mezi čísla 4 a 24 vlož dva členy, aby první tři členy tvořily gp a poslední tři členy ap. [$a_1 = 4$; $a_2 = 4q$, $a_3 = 4q^2$; $a_4 = 24$, $a_3 = 24 - d$, $a_2 = 24 - 2d$]

15. Určete velikost ostrého úhlu a jestliže výrazy $\cot a$; $\frac{1}{\sin a}$; $\tan a$ jsou 3 po sobě jdoucí členy ap. [$a_1 = 60^\circ$]

16. Dokažte, že daná tři čísla jsou tři po sobě následující členy aritmetické posloupnosti. Určete diferencii.

1. $\log 16, \log 8, \log 4$; [$\log \frac{1}{2}$]

2. $\frac{1999}{2000}, \frac{2999}{2000}, \frac{3999}{2000}$; [$\frac{1}{2}$]

3. $\sin 60^\circ$; $\sin 0^\circ$; $\sin(-60^\circ)$; [$-\frac{\sqrt{3}}{2}$]

4. $a^2 - 2$; $(a + 1)^2$; $(a + 2)^2$; $a \in \mathbb{R}$; [$2a + 3$]

17. Určete reálné x tak, aby čísla $a_1 - a_3$ tvořila tři následující členy aritmetické posloupnosti:

1. $a_1 = x^2 + x$; $a_2 = x^2 + 4x + 4$; $a_3 = 16$; [-8 ; 1]

2. $a_1 = \log(2x - 1)$; $a_2 = \log(4x - 2)$; $a_3 = \log(5x + 2)$; [2]

3. $a_1 = \sin x$; $a_2 = \sin(x + \frac{\pi}{4})$; $a_3 = \sin(x + \frac{\pi}{2})$; [$\frac{1}{6}\pi$; $\frac{5}{6}\pi + k\pi$]

18. V ap. je $a_1 = 20$; $d = 4$.

- kolikátý člen je roven číslu 100?; [17 .]

- kolikátý číslu 150?; [nemá řešení]

19. Určete první člen a diferencii ap, ve které platí:

1. $2a_2 - a_3 = 20$; $a_4 - 5a_1 = -95$; [20 , -5]

2. $a_3 = 2a_4$; $a_2 = -a_8$; [\mathbb{R} , $-\frac{a_1}{4}$]

3. $a_1 + a_5 = 5$; $a_1^2 + a_2^2 = 13$; [3 , -1 ; 2 , 1]

4. $a_3 + a_5 = 8$; $a_3^2 - a_5^2 = 32$; [10 , -2]

5. $a_4 + a_5 = 4$; $a_4 \cdot a_5 = -5$; [-19 , 6 ; 23 , -6]

20. Tři čísla, která tvoří tři po sobě následující členy ap, mají součet 60 a součin 7500. Určete tato čísla. [$15, 20, 25$; nebo $25, 20, 15$].

21. Mezi kořeny rovnice $x^2 - 10x + 16 = 0$ vložte 4 čísla, aby spolu s kořeny tvořily 6 po sobě následujících členů ap. [2+3,2;4,4;5,6;6,8;8 nebo obráceně]
22. V aritmetické posloupnosti známe $a_1 = 18; d = -5$. Určete $n \in \mathbb{N}$, aby platilo $a_n + a_{n+3} = -189$; [22].
23. Délky stran pravoúhlého trojúhelníku tvoří tři po sobě následující členy ap, obvod trojúhelníku je 96. Vypočítejte délky stran. [24;32;40].
24. Aritmetická posloupnost je dána $a_n = \frac{1}{4}(3 - 2n)$. Vypočítejte $a_1; d$. Dále spočítejte součet prvních a druhých 10 členů posloupnosti. [$\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}; s_{10} = -20; -70$].
25. V ap je $a_1 = 3; d = 4$. Kolik členů této posloupnosti musíme sečíst, aby součet byl větší než 250? [aspoň 11].
26. V ap známe $a_3 = 18$. Určete podmínku pro d , aby platilo $s_9 \leq 150$. [$d \leq -\frac{2}{3}$].
27. Určete součet všech sudých čísel, která vyhovují nerovnici $x^2 - 53x + 150 \leq 0$; [$s_{24} = 648$].
28. Vypočítejte součet všech dvojciferných přirozených čísel. [4905].
29. Dokažte, že součet prvních n lichých čísel je n^2 . [$a_1 = 1; a_n = 2n - 1; s_n = n^2$].
30. V ap určete první člen a diferenci:
1. $a_6 = -\frac{1}{3}a_{16}; s_{26} = 104; [-6; 0, 8]$
 2. $s_5 = 60; s_{10} = 170; [8; 2]$
 3. $s_{10} = s_{11} = 165; [30; -3]$
31. V ap je $a_1 = 10; d = -2$. Vypočítejte člen, který je roven jedné šestině součtu všech členů předchozích. [4;-30].
32. Součet prvních deseti členů ap. je 210. Součet následujících deseti členů je 610. Určete a_1, d ; [3; 4].

Geometrická posloupnost

1. Napište prvních pět členů geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je-li dáno:

1. $a_1 = -1; a_2 = 2; [-1, 2, -4, 8, -16]$
2. $a_1 = 16; q = \frac{1}{2}; [16, 8, 4, 2, 1]$
3. $a_3 = 4\sqrt{3}; a_4 = -8\sqrt{3}; [\sqrt{3}, -2\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, -8\sqrt{3}, 16\sqrt{3}]$
4. $a_3 = 8; a_6 = 64; [2, 4, 8, 16, 32]$
5. $a_2 - a_1 = 15; a_3 - a_2 = 60; [5, 20, 80, 320, 1280]$

2. V g. p.:

1. je dáno: $a_1 = 1; q = 3; s_n = 80; n = ?; [4]$
2. $a_4 = 9a_2; s_4 = 80; a_1 = ?, q = ? [a_1 = -4; q_1 = -3; a_2 = 2; q_2 = 3]$
3. $a_1 = 5; a_n = 640; s_n = 1275; q = ?, n = ? [2; 8]$

3. Přičteme-li k číslům 2, 7, 17 totéž číslo, vzniknou první tři po sobě jdoucí členy gp. Určete je. $[5, 10, 20]$

4. Čísla, jimiž jsou v centimetrech vyjádřeny délky hran kváдру, tvoří tři po sobě jdoucí členy gp. Objem kváдру je 216cm^3 . Součet délek hran vycházejících z jednoho vrcholu je 21 cm. Délky hran kváдру? $[3, 6, 12]$

5. Určete čtyři čísla, která jsou čtyřmi po sobě jdoucími členy gp a jejichž dekadické logaritmy jsou čtyřmi po sobě jdoucími členy ap s diferencí = 1, přičemž součet těchto logaritmů je 22. $[10^4, 10^5, 10^6, 10^7]$

6. Počáteční množství dřeva v lese bylo odhadnuto na 20000m^3 a jeho průměrný roční přírůstek je 2,5%.

- a. kolik m^3 dřeva by bylo v lese bez těžby za 10 let a kolik procent původního množství by činil jeho celkový přírůstek 25602, 28%
- b. kolik m^3 dřeva bude v lese za 10 let, jestliže se na konci 5. roku vytěží 3000m^3 ? $[22208]$
- c. za jak dlouho by se původní množství dřeva (bez těžby) zvýšilo o 10000m^3 ? $[16, 42]$

7. Jaký byl průměrný roční procentuální přírůstek v období, kdy za 11 let vzrostl počet obyvatel z 15 234 000 na 16 000 000? $[0, 447\%]$

8. Stroj ztrácí každý rok 10% své hodnoty. Jaká byla jeho nákupní hodnota, jestliže po 13 letech měl hodnotu 10 168 Kč? $[40002]$

9. Jakou hodnotu bude mít za 8 let mobil, který při koupení stál 10 000 Kč a každý rok ztratí 20% své hodnoty?

10. Dokažte, že daná tři čísla tvoří tři za sebou jdoucí členy gp, určete kvocient:

1. $\sqrt{5} - \sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{5} + \sqrt{2}; \left[\frac{\sqrt{15} + \sqrt{6}}{3} \right]$
2. $\frac{1999}{2000}; \frac{1999}{4000}; \frac{1999}{8000}; \left[\frac{1}{2} \right]$
3. $\sin 2x; \cos x; \frac{1}{2} \cot x; x \in (0; \pi); \left[\frac{1}{2 \sin x} \right]$
4. $b + 1; b^2 + 2b + 1; b^3 + 3b + 1; b \in \mathbb{R}; [b + 1]$

11. Určete reálné x tak, aby čísla $a_1 - a_3$ tvořila tři po sobě následující členy gp:

1. $a_1 = 1; a_2 = 2^x; a_3 = 2^{x+2} + 12; [\log_2 6]$
 2. $a_1 = 1 + 2 \log x; a_2 = 3 - 4 \log x; a_3 = 3 + \log x; [100; 10^{\frac{3}{14}}]$
 3. $a_1 = \frac{1}{2 \cot x}; a_2 = 1; a_3 = \frac{3}{\sin 2x}; [\frac{1}{6}\pi; \frac{5}{6}\pi + k\pi]$
12. V gp. je $a_1 = 64; q = \frac{1}{2}$. Kolikátý člen je roven číslu $\frac{1}{32}$; [12.]
13. Určete $a_1; q$ v geometrické posloupnosti, je-li dáno:
1. $a_2 = 16; a_4 = 1; [64, \frac{1}{4}; -64, -\frac{1}{4}]$
 2. $a_1 + a_2 - a_4 = -110; a_2 + a_3 - a_5 = -220; [22, 2]$
 3. $a_8 - a_4 = 360; a_7 - a_5 = 144; [3, 2; -3072, \frac{1}{2}]$
 4. $a_2 + a_3 = 60; a_1 + a_4 = 252; [2, 5; 250, \frac{1}{5}]$
 5. $a_2 \cdot a_3 = 9; a_2 + a_3 = 10; [81, \frac{1}{9}; \frac{1}{9}, 9]$.
14. Určete tři reálná čísla větší než 8 a menší než 648 tak, aby spolu s danými čísly tvořily pět členů gp. [$q = \pm 3$]
15. Mezi kořeny rovnice $x^2 - 10x + 16 = 0$ vložte čtyři čísla, aby spolu s dvěma kořeny rovnice tvořila šest členů gp. [$2, 2\sqrt[3]{4}; 2\sqrt[3]{16}; 4\sqrt[3]{2}; 4\sqrt[3]{8}$ nebo obráceně]
16. V gp známe $a_1 = \frac{1}{64}; q = 2$. Určete $n \in \mathbb{N}$ aby platilo $a_n + a_{2n} = 8200$; [10].
17. Délky hran kváдру tvoří tři po sobě jdoucí členy gp, součet délek všech hran kváдру je 84. Vypočítejte povrch kváдру, víte-li, že jeho objem je 64. [1,4,16;168].
18. V gp s prvním členem $a_1 = 36$ určete q tak, aby platilo $s_3 \leq 252$; [$q \in (-3; 2)$].
19. V gp s $q = 2$ vypočítejte, kolik členů dává součet 186, jestliže poslední sčítanec je $a_n = 96$.; [5].
20. V gp platí $s_6 = 9s_3$. Určete $a_1; q$. [$\mathbb{R} - \{0\}; 2$].
21. Součet prvních tří členů gp je roven číslu 38. Součet následujících tří členů pak $\frac{304}{27}$. Vypočítejte $a_1; q; s_6$; [$18; \frac{2}{3}; \frac{1330}{27}$].
22. Mezi čísla 16 a 81 dejte několik čísel, aby s danými čísly tvořila gp a dále, aby platilo:
- součet čísel vložených i původních čísel je 211; [16, 24, 36, 54, 81]
 - součet čísel vložených je -42; [16, -24, 36, -54, 81].
23. Za pět let se počet obyvatel v Chvojkovicích-Brodě zvýšil o 12%. Jaký byl roční přírůstek? (na desetiny) [2,3%]
24. Za kolik let klesne hodnota předmětu na méně než desetinu původní ceny, jestliže ročně odepisujeme 18% ceny předmětu z předchozího roku? [12 let].
25. Kolik peněz musí pan Spořil uložit, aby při ročním úročení 8,5% měl za pět let 25000 Kč? (Daně z úroků jsou 15%); [17638,40 Kč].

26. Slečna Hulilová prokouří ročně 1200 Kč. Kolik by uspořila za padesát let, kdyby tuto částku ukládala počátkem roku na vkladní knížku s ročním úročením 8%? (Daně z úroků jsou 15%). [486752 Kč].

27. Pan Platil má půjčku 300000 Kč na roční úrok 14%. Jak velká musí být každoroční splátka dluhu koncem roku, chce-li dluh splatit za pět let? A kolik peněz přeplatí?? [87385,40 Kč].

28. Pan Uťápnutý je schopen každoročně po dobu 10 let splácet částku 50000 Kč. Jak velkou půjčku si může vzít na roční úrok 15%? [250938,40 Kč].

29. Pan Tulivý vyžehnil 3 000 000 Kč. Počátkem roku uloží tuto částku na úrok 9% (daň z úroků je 15%). Kolik peněz může na konci roku vybírat, jestliže

- vybírá jen úroky; [229500 Kč]
- chce, aby mu peníze vystačily na 30 let; [257732,40 Kč].

30. Do banky uložíme 30000 Kč. Kolik peněz budeme mít po jednom roce, jestliže nám úroky ve výši 9% připisují (při 15% zdanění úroků):

- Ročně; [10765 Kč]
- čtvrtletně; [10787,20 Kč]
- Měsíčně?; [10792,40]

Pozn. úrokovací rok má 360 dnů, měsíc 30 dnů. (aby to sedělo :-)).

Binomická věta

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

Pascalův trojúhelník $n+1$ řádku odpovídá $(a + b)^n$

$$\text{Trik } (a - b)^n = (a + (-b))^n$$

$$\text{K-tý člen } \binom{n}{k-1}a^{n-(k-1)}b^{k-1}$$

1. Proved'te $(1 - 3i)^4$ pomocí Binomické a Moivrovovy věty $[-8 + 8\sqrt{3}i]$

2. odvození Gonio. vzorečků $(\cos x + i \sin x)^n$

3. V binomickém rozvoji $(x^2 + x^{-1})^n$ určete ten člen, který neobsahuje x , jestliže součet koeficientů u prvních třech členů je 46. $[n = 9, 7. \text{clen}]$

4. Vypočtete

$$1. (x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

$$2. (x - 3y)^5 = x^5 - 15x^4y + 90x^3y^2 - 270x^2y^3 + 405xy^4 - 243y^5$$

$$3. (3x - \frac{2}{y})^4 = 81x^4 - 216\frac{x^3}{y} + 216\frac{x^2}{y^2} - 96\frac{x}{y^3} + 16\frac{1}{y^4}$$

$$4. (1 - 2\sqrt{3})^4 = 217 - 104\sqrt{3}$$

5. Určete

a. čtvrtý člen binomického rozvoje výrazu $(x + 2)^{12}$; $[1760x^9]$

b. člen binomického rozvoje výrazu $(x + 1)^{12}$ obsahující x^6 ; 7. člen

6. Užitím binomické věty vypočtete

$$a. (a + b)^5 + (a - b)^5 = 2a^5 + 20a^3b^2 + 10ab^4$$

$$b. (x + 2)^4 - (x + 1)^4 = 4x^3 + 18x^2 + 28x + 15$$

7. Kolikátý člen binomického rozvoje výrazu $(2x^2 - \frac{1}{x})^8$ obsahuje x^7 ? 4. člen

8. S využitím binomické věty určete součet

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = [2^n]$$

9. Zjednodušte

$$1. (a + b)^5 + (a - b)^5 = 2a^5 + 20a^3b^2 + 10ab^4$$

$$2. (x + 2)^4 - (x + 1)^4 = 4x^3 + 18x^2 + 28x + 15$$

10. Najděte

1. pátý člen rozvoje výrazu $(1 + 3x^2)^{12}$; $[40095x^8]$

2. třináctý člen rozvoje výrazu $(9x - \frac{1}{3x})^n$; $n \in \mathbb{N}$, je $li(\frac{n}{2}) = 105$; $[\frac{455}{729x^9}]$

3. prostřední člen rozvoje výrazu $(\frac{a}{x} - \sqrt{x})^{16}$; $[12870\frac{a^8}{x^4}]$

4. člen rozvoje výrazu $(\sqrt[3]{3} + \sqrt{2})^5$ který je přirozeným číslem; $[A_3 = 60]$

11. Najděte

1. v rozvoji výrazu $(2 - \sqrt[3]{x})^{10}$ člen obsahující x^2 ; $[3360x^2]$

2. v rozvoji výrazu $(\sqrt[3]{x} + \frac{2}{x})^{12}$ absolutní člen; $[1760]$

12. Pomocí binomické věty dokažte:

1. číslo $11^{10} - 1$ je dělitelné 100; $[(10 + 1)^{10} - 1]$
2. číslo $6^{2n} - 1$ je pro $\forall n \in \mathbb{N}$ dělitelné sedmi; $(35 + 1)^n - 1$ nebo $(6^n + 1)(6^n - 1)$ a jednou ta jednička vždycky vypadne (pro liché nebo sudé n)

13. Určete:

1. 4. člen binomického rozvoje $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^5$; $10xy\sqrt{y}$
2. 3. člen binomického rozvoje $(x^5 - 2y^4)^4$; $24x^{10}y^8$

14. Určete, pro která reálná x je v binomickém rozvoji $(\sqrt[3]{4-2x} + \sqrt[6]{3-2x})^9$ sedmý člen roven číslu 168; $x = 1$

15. Určete absolutní člen binomického rozvoje výrazu $(2x^2 - \frac{3}{x})^6$; [4860]

16. Užitím b.v. dokažte, že číslo $17^{19} + 19^{17}$ je dělitelné číslem $17+19 (=36)$:-). Návod $17^{19} = (18 - 1)^{19}$, $19^{17} = (18 + 1)^{17}$...

17. Kolik členů obsahuje binomický rozvoj $(1 + 2x)^{20}$; [21_cleňu]

18. Vypočítejte pátý člen binomického rozvoje $(1 + y)^{10}$; [$A_5 = 210y^4$]

19. Vypočítejte desátý člen binomického rozvoje $(2a + b)^{15}$; [$A_{10} = 320320a^6b^9$]

20. Určete reálné x tak, aby pátý člen binomického rozvoje $(\frac{2}{x} - \sqrt{x})^9$ byl roven 2016. [$x = 2^{\frac{1}{3}}$]

21. Určete reálné z tak, aby sedmý člen binomického rozvoje $(\sqrt[3]{1+z} + \sqrt[6]{1-z})^9$ byl roven 63. [$z = \pm \frac{1}{2}$]

22. Který člen binomického rozvoje $(5 - 2m)^7$ obsahuje m^4 ?; [5.cleň]

23. Který člen binomického rozvoje $(y^2 + \frac{1}{y})^9$ obsahuje y^3 ?; [6.cleň]

24. Který člen binomického rozvoje $(\frac{2}{c^2} + \sqrt{c})^{12}$ obsahuje výraz $\sqrt{\frac{1}{c^3}}$?; [10.cleň]

25. Vypočítejte takový člen binomického rozvoje, který neobsahuje a:

- $(3\sqrt{a} - a^{-2})^{10}$; [3.cleň; $A_3 = 295245$]
- $(a^{\frac{3}{4}} + \frac{1}{a\sqrt{a}})^8$; [neexistuje]

26. V binomickém rozvoji $(\frac{2x^2}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{x^5})^{14}$ najděte člen, který:

- Neobsahuje x; [5.cleň; $A_5 = 1025024y^{-3}$]
- Neobsahuje y; [8.cleň; $A_8 = 439296x^{-21}$]

27. Najděte všechny členy binomického rozvoje, které jsou racionálními čísly:

- $(\sqrt{5} + 1)^6$; [4.cleň; $A_1 = 125$; $A_3 = 375$; $A_5 = 75$; $A_7 = 1$]
- $(\sqrt{3} - \sqrt{5})^{11}$; [neexistují]

- $\left(x^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{14}$; [3.clen; $A_3 = 91x^3$; $x \in \mathcal{Q}$]

28. Určete přirozené n tak, aby třetí člen binomického rozvoje $\left(x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{x}\right)^n$ neobsahoval proměnnou X . [$n = 8$]

29. Určete přirozené n tak, aby pátý člen binomického rozvoje $\left(\frac{1}{\sqrt{z}} - 2z\right)^n$ neobsahoval proměnnou Z . [$n = 12$]

30. Určete přirozené n tak, aby koeficient u y^8 v binomickém rozvoji $(1 + 2y^2)^n$ byl roven 240. [$n = 6$]

31. Užitím binomické a Moivroy věty odvoďte vzorce pro

- $\sin 3x$; $\cos 3x$; [$3 \sin x - 4 \sin^3 x$; $4 \cos^3 x - 3 \cos x$]
- $\sin 5x$; $\cos 5x$; [$5 \sin x - 20 \sin^3 x + 16 \sin^5 x$; $5 \cos x - 20 \cos^3 x + 16 \cos^5 x$]

32. Užitím binomické věty dokažte, že platí:

- Pro všechna přirozená n je číslo $\frac{4^{2n}-1}{15}$ celé číslo; $\left[\frac{(15+1)^n-1}{15}\right]$
- Pro všechna přirozená n je číslo $4^n - 1$ dělitelné 3; $[(3+1)^n - 1]$

Diferenciální počet

- je-li $f(x) = g(x)$ a existuje-li $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, pak existuje i $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- pravidla pro počítání limit; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ Hosp!
- spojitost a derivace = má-li fce v bodě derivaci, pak je tady spojitá. Bach obráceně to neplatí
- derivace důležitých funkcí - viz tabulky
- věty o střední hodnotě :
 - Rolleova, fce spojitá $\langle a, b \rangle$ a má derivaci všude v (a, b) , $f(a) = f(b)$; pak existuje někde mezi nimi nějaké c , kde $f'(c) = 0$ (kopeček, dolíček)
 - Lagrange: taky spojitá v $\langle a, b \rangle$ a má derivaci v (a, b) ; pak existuje aspoň jedno c mezi a a b : $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ tečna grafu v c stejný směr jako mezi body a, b
 - Cauchy: 2 funkce f, g : obě zase spojitě v $\langle a, b \rangle$ a mají derivaci v (a, b) g navíc nenulovou (je prostá atd.), tedy $g'(x) \neq 0$ pro všechna $x \in (a, b)$, pak existuje aspoň jeden bod c mezi a, b : $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.. z toho je odvozeno důležité l'Hospitalovo pravidlo
- monotónnost a derivace - důsledek Lagrangeovy věty
- extrémy - důsledek Rolleovy věty
- Weierstrass: Necht' f je spojitá ve $\langle a, b \rangle$ - i v krajních bodech, pak platí:
 - funkce je na $\langle a, b \rangle$ omezená
 - funkce nabývá na $\langle a, b \rangle$ v vždy alespoň v jednom bodě absolutního maxima a minima. - důležitá věta při definici určitého integrálu

1. Vypočtěte limity funkce:

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^3-1} ; \left[\frac{2}{3} \right]$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} ;$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x} ; [2]$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2-x+1}{7-2x^2} ; [1]$
5. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{\sin 8x} ; \left[\frac{8}{9} \right]$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} ; [1]$
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} ; [1]$
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} ; \left[\frac{1}{2} \right]$
9. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+x-12}{2x^2-x-15} ; \left[\frac{7}{11} \right]$
10. těžký, $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{1-\tan x} - \sqrt{1+\tan x}}{\sin 2x}$
11. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)}{3x^3-2x-1} ; \left[\frac{3}{7} \right]$
12. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$
13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}-6x}{3x+1} ; [0]$
14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}} ; \left[\sqrt{72} \right]$
15. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x} ; \left[\sqrt{2} \right]$
16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x + \sin 7x}{\sin 3x} ; \left[\frac{1}{3} \right]$
17. $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \cot x ; [1]$
18. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} ; [2]$
19. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 1}$
20. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - \ln^2 x}{x - x^2}$

22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - 2 + x^2}{x^2 \sin^2 x}$
23. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 3(e^x - 1)}{x^3}$
24. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x}{2(x^2 - 1)}; \left[\frac{1}{4} \right]$
25. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}; \left[\frac{1}{2} \right]$
26. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}; \left[\frac{1}{4} \right]$
27. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x} - 1}; [2]$

2. Z obdélníku o rozměrech 5 dm, 8 dm vystřihněte krabici ve tvaru kvádra bez víka maximálního objemu. Jaké budou její rozměry?

3. Na válcovou konzervu se smí spotřebovat 5 dm^2 plechu. Jaké má mít rozměry, aby měla co největší objem? Objem vypočtete.

4. Vyšetřete průběh funkce:

1. $f: y = \frac{x^2}{x-1}$
2. $f: y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$
3. $f: y = 4x^3 - x^4$
4. $f: y = x^2 e^{-x}$
5. $f: y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$
6. $f: y = \frac{x}{1+x^2}$

5. Napište rovnici tečny ke grafu funkce $f: y = \frac{x^2}{x-1}$ v bodě $x_0 = 3$.

6. Ve kterém bodě má graf funkce $f: y = x^2 \cdot 3^x$ tečnu rovnoběžnou s osou x?

7. Určete rovnice tečen ke grafu funkce $f: y = x^3 + x^2 - 2x$ v průsečících grafu funkce s osou x.

8. Určete reálné číslo b tak, aby graf funkce $y = \frac{(bx-x^3)}{4}$ protínal osu x pod úhlem 45° .

9. Na parabole $y = x^2$ najděte bod, který má nejmenší vzdálenost od bodu $T[3; 0]$.

10. Dokažte, že inflexní body funkce $y = \frac{x+1}{x^2+1}$ leží na přímce $x - 4y = 0$.

11. Určete rovnice tečny elipsy $5x^2 + y^2 = 25$ v bodě $T[1; -2\sqrt{5}]$. Že by $[5x - 2\sqrt{5}y = 25]$

12. Vypočtete:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x}; \left[-\frac{1}{2} \right]$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{3x}; \left[\frac{5}{3} \right]$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x + \tan^2 x}{x \sin x}; [3]$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}; \left[\frac{1}{2} \right]$

13. Vypočtete derivace těchto funkcí:

1. $\sin^2 x; [\sin 2x]$
2. $\tan^3 x - 3 \tan x; \left[\frac{3}{\cos^2 x} (\tan^2 x - 1) \right]$
3. $\sin \frac{1}{2}x + \cos \frac{1}{2}x; \left[\frac{1}{2} (\cos \frac{1}{2}x - \sin \frac{1}{2}x) \right]$

14. Vypočtěte derivaci funkce dané předpisem:

1. $y = \sin^3 x; [3 \sin^2 x \cos x]$
2. $y = \sin 3x; [3 \cos 3x]$
3. $y = \sin^2 3x; [3 \sin 6x]$
4. $\sin^2 \frac{1}{3}x; [\frac{2}{3} \sin \frac{2}{3}x]$

15. Vypočtěte derivaci funkce dané předpisem:

1. $y = \ln(2x + 3); [\frac{2}{2x+3}]$
2. $y = e^{x^2-3x}; [(2x-3)e^{x^2-3x}]$
3. $y = \ln^3 2x^2; [\frac{\ln^2 2x^2}{x}]$
4. $y = e^{x\sqrt{x}}; [\frac{3}{2}\sqrt{x} e^{x\sqrt{x}}]$

16. Na grafu funkce $f: y = x^2 - 2x + 3$ najděte bod, ve kterém je tečna grafu rovnoběžná s přímkou $3x - y + 5 = 0$. $T[\frac{5}{2}; \frac{17}{4}]$

17. V kterém bodě křivky $y = 2 + x - x^2$ je její tečna rovnoběžná s osou x ? $T[\frac{1}{2}; \frac{9}{4}]$

18. Napište rovnici tečny a normály ke grafu funkce: $f: 2x - \ln x$ v jeho bodě $T[1; ?]$.
 $[T[1; 2]; t: y = x + 1; n: y = -x + 3.]$

19. Napište rovnici tečny a normály ke grafu funkce: $f: y = \frac{8}{x^2+4}$ v jeho bodě $T[2; ?]$.
 $[T[2; 1]; t: y = -\frac{1}{2}x + 2; n: y = 2x - 3]$

20. Určete intervaly monotónnosti daných funkcí:

1. $f: y = 2x + 3$; roste v \mathbb{R}
2. $f: y = x^3 - 8$; roste $(-1; \infty)$ klesá v $(-\infty; -1)$
3. $f: y = x^2 + 2x + 3$; roste v \mathbb{R}
4. $f: y = -x^4 - x^2$; roste v $(-\infty; 0)$; klesá v $(0; +\infty)$

21. Určete intervaly monotónnosti daných funkcí:

1. $y = x + \frac{1}{x}$; rostoucí v $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, klesající v $(-1; 0) \cup (0; 1)$
2. $y = \frac{1}{1+x^2}$; rostoucí v $(-\infty; 0)$, klesající v $(0; +\infty)$
3. $y = \frac{x+1}{x-1}$; klesající v $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$
4. $y = \frac{1}{x^2-1}$; klesající v $(0; 1) \cup (1; \infty)$, rostoucí v $(-\infty; -1) \cup (-1; 0)$

22. Určete intervaly monotónnosti funkce: $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 12$. klesající v $(-2; 1)$, rostoucí v $(-\infty; -2) \cup (1; \infty)$

23. Vyšetřete lokální extrémů funkcí:

1. $y = -x^2 + x + 1$; v bodě $\frac{1}{2}$ lokální maximum $\frac{5}{4}$
2. $y = x^3 - x^2$; v bodě 0 lokální maximum 0; v bodě $\frac{2}{3}$ lokální minimum $-\frac{4}{27}$
3. $y = x^4 - x^2$; v bodě 0 lokální maximum 0; v bodech $\pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$ lokální minimum $-\frac{1}{4}$
4. $y = 3x^5 - 5x^3$; v bodě -1 lokální maximum 2; v bodě 1 lokální minimum -2.

24. Vyšetřete průběh daných funkcí:

1. $y = x^3$; klasika a potom posunovačka grafu
2. $y = x^3 - 1$;

3. $y = (x - 1)^3$;
4. $y = (x - 1)^3 - 1$;

25. Vyšetřete průběh daných funkcí:

1. $y = x^3 - 3x^2 - 9x$; $[D = H = R; kles(-1; 3), rost(-\infty; -1) \cup (3; \infty);]$ v bodě -1 lokální max. 5, v bodě lokmin -27; inflexní $[1; -11]$
2. $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$; $[D = H = R; kles(-1; 2); rost(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)]$ v bodě -1 lokmax 13, v bodě 2 lokmin -14, inflexní $[\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}]$.
3. $y = x^3 - 9x^2 + 24x$; $[D = H = R; kles(2; 4); rost(-\infty; 2) \cup (4; +\infty)]$ v bodě 2 lokmax 20, v bodě 4 lokmin 16; inflexní $[3; 18]$
4. $y = x^3 - 12x + 1$; $[D = H = R; kles(-2; 2); rost(-\infty; -2) \cup (2; \infty)]$ v bodě -2 lokmax 17, v bodě 2 lokmin -15; inflexní $[0; 1]$

26. Vyšetřete průběh daných funkcí:

1. $y = \frac{1}{1+x^2}$; $[D = R; H = (0; 1 >; sudá; rost(-\infty; 0); kles(0; \infty)]$ v bodě 0 lokmax 1, inflexní $[\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}; \frac{3}{4}]$
2. $y = \frac{x}{x^2+1}$; $[D = R; H = < -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} >; lichá; kles(-\infty; -1) \cup (1; \infty); rost(-1; 1)]$ v bodě 1 lokmax $\frac{1}{2}$; v bodě -1 lokmin $-\frac{1}{2}$; inflexní $[0; 0]; [\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}; \frac{1}{4}]$
3. $y = \frac{x^2}{x^2+1}$; $[D = R; H = < 0; 1); sudá; kles(-\infty; 0); rost(0; +\infty)]$ v bodě 0 lokmin 0, inflexní $[\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}; \frac{1}{4}]$
4. $y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$; $[D = R; H = (-1; 1 >; sudá; rost(-\infty; 0); kles(0; \infty)]$ v bodě 0 lokmax 1, inflexní $[\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}; \frac{1}{2}]$

27. Vyšetřete průběh daných funkcí:

1. $y = \sqrt{x} - x$; $[D = < 0; \infty); R = (-\infty; \frac{1}{4} >; rost(0; \frac{1}{4}); kles(\frac{1}{4}; \infty)]$ v bodě $\frac{1}{4}$ lokmax $\frac{1}{4}$
2. $y = \sqrt{1-x^2}$; $[D = < -1; 1 >; H = < 0; 1 >; sudá; \pm 1 lok min 0;]$ v bodě 0 lokmax 1; grafem je polokružnice
3. $y = \frac{x}{1-x^2}$; $[D = R - \{\pm 1\}; R = R; lichá; asymptoty $x = \pm 1$; rost(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)]$; lokální extrémů neexistují; inflexní bod $[0; 0]$
4. $y = \frac{x^2+4}{x}$; $[D = R - \{0\}; H = (-\infty; -4 > \cup < 4; \infty); lichá; as : $x = 0; y = x$;]$ $[rost(-\infty; -2) \cup (2; \infty); kles(-2; 0) \cup (0; 2)]$ v bodě 2 lokmin 4, v bodě -2 lokmax -4.

28. Číslo 28 vyjádřete jako součet dvou sčítanců x , $28-x$ tak, aby jejich součin byl co největší. $[14 + 14]$

29. Najděte takové kladné reálné číslo x , aby součet tohoto čísla x a jeho převrácené hodnoty byl minimální. $[x = 1]$

30. Najděte obdélník, který má při daném obvodu $o=10\text{cm}$ maximální obsah. $[a = 2, 5\text{cm}]$

31. Číslo 100 vyjádřete jako součet dvou sčítanců tak, aby součet jejich druhých mocnin byl minimální. $[50, 50]$

32. Určete intervaly monotónnosti dané funkce: $\frac{x}{1-x^2}$; roste v $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$

Integrální počet

- neurčitý integrál, existence primitivní funkce: je-li f spojitá na $(a; b)$, pak k ní na tomto intervalu existuje primitivní funkce
- pravidla pro integrování: $kf(x); f(x) + g(x)$; vzorce pro neurčité integrály
- metody integrování:
 - substituce, vychází z derivace složené funkce:
 $\int f(g(t)) \cdot g'(t) dt = \int f(x) dx$; kde $x = g(t)$; $dx = g'(t) dt$.
 - per partes, vychází z derivace součinu $\int u \cdot v = uv - \int uv'$.

1. Vypočtete:

1. $\int (x^3 - 6x^2 + 5x - 4) dx$; $\left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{5x^2}{2} - 4x + c; x \in \mathbb{R} \right]$

2. $\int (2 - \sqrt{x})^2 dx$; $\left[4x - \frac{8}{3}x\sqrt{x} + \frac{1}{2}x^2 + c; x \in (-\infty; \infty) \right]$

3. $\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{4}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx$; $\left[-\frac{1}{x} - 12\sqrt[3]{x} + c; x \in (0; \infty) \right]$

4. $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x} dx$; $\left[x - 4\sqrt{x} + \ln x + c; x \in (0; +\infty) \right]$

2. K funkci $f: y = 3x^2 - 2x + 5$ určete tu primitivní funkci F , která v bodě $x_0 = 1$ nabývá hodnoty 4. $[x^3 - x^2 + 5x - 1; x \in \mathbb{R};]$

3. Vypočtete:

1. $\int \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) dx$; $\left[\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) + c; x \in \mathbb{R} \right]$

2. $\int (2^x - 3^x) dx$; $\left[\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{3^x}{\ln 3} + x; x \in \mathbb{R} \right]$

Užití neurčitého integrálu ve fyzice:

4. Určete dráhu v čase t pro přímočarý pohyb hmotného bodu, jehož rychlost je konstantní $v = v_0$; a dráha v čase $t = 0$ je $s = s_0$. $[s = v_0 \int dt = v_0 t + c; s = c = s_0; \text{takže } : s = v_0 t + s_0].$

5. $\int \sin^5 x \cos x dx = \left[\sin x = t; \cos x \cdot dx = dt; \frac{\sin^6 x}{6} + c \right]$

6. Vypočtete $\int \frac{\ln x}{x} dx; x \in (0; \infty)$; $\left[\ln x = t; \frac{1}{x} dx = dt; \frac{\ln^2 x}{2} + c \right]$

7. Vypočtete $\int x \cdot e^x dx$; $[e^x(x-1) + c]$

8. Vypočtete $\int \ln x dx$; $[x(\ln x - 1) + c]$

9. $\int \sin^2 x \cdot dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x + c \right]$

URČITÝ INTEGRÁL

- Weierstrass: Nechť f je spojitá ve $\langle a; b \rangle$ - i v krajních bodech, pak platí:
 - funkce je na $\langle a; b \rangle$ omezená
 - funkce nabývá na $\langle a; b \rangle$ v vždy alespoň v jednom bodě absolutního maxima a minima. - důležitá věta při definici určitého integrálu
- existence určitého integrálu na funkci spojitě na $\langle a; b \rangle$, dělení intervalu na dílčí intervaly a tvorba dílčích dolních a horních součtů minim a maxim, jejichž existence plyne s Weierstrassovy věty

- Newton-Leibnitzův vzorec: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.
- Geometrické aplikace určitého integrálu
 - obsah obrazce ohraničeného grafy spojitých funkcemi f, g $S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$
 - objem rotačního tělesa vzniklého rotací křivočarého lichoběžníku $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$.

10. Vypočítejte obsah obrazce ohraničeného grafy funkcí $f: y = 2 - x^2; g: y = x$.
 $[S = \int_{-2}^1 [(2 - x)^2 - x]dx = \frac{9}{2}]$.

11. Odvoďte vzorec pro objem koule o poloměru r : $[V = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2)dx = \pi [r^2x - \frac{x^3}{3}]_{-r}^r]$

12. Odvoďte vzorec pro výpočet objemu kulové výšečky výšky v , jež je vytváta z koule o poloměru r . $[V = \pi \int_{r-v}^r (r^2 - v^2)dx = \pi [r^2x - \frac{x^3}{3}]_{r-v}^r = \frac{1}{3}\pi v^2(3r - v)]$

FYZIKÁLNÍ APLIKACE URČITÉHO INTEGRÁLU

- dráha přímočarého pohybu konanéno rychlostí $v = v(t); t \in \llbracket t_1; t_2 \rrbracket$: $s = \int_{t_1}^{t_2} (v(t)dt)$
- práce vykonaná na přímočaré dráze ve směru osy x silou velikosti $F = F(x)$: $W = \int_a^b F(x)dx$.

13. $\int x^2 \ln x dx = [\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + c]$

14. $\int \frac{1}{2 \sin x} dx = [\tan x + \frac{1}{\cos x} + c]$

15. $\int \tan^2 x dx = [\tan x - x + c]$

16. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = [\frac{1 - \cos 2x}{2}]_0^{\frac{\pi}{2}} = [\frac{1}{2}x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [\frac{\sin 2x}{4}]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}?$

17. $\int_{-1}^2 (x^2 - x + 1)dx = [\frac{9}{2}]$.

18. $\int \frac{x(\sqrt[3]{x} - x^3 \sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = [\frac{12x^2 \sqrt[3]{x}}{25} + \frac{4}{7x \sqrt[4]{x^3}} + c?]$

19. Spočítejte plochu ohraničenou křivkami $y = x^2 - 6; y = 4x - x^2; [\int_{-1}^3 (f - g) = \frac{64}{3}]$

20. Spočítejte plochu ohraničenou křivkami $y = \frac{x^2}{2} - 3x + 4; \text{osa } x, \text{osa } y, p \parallel y, M \in p, M[5; 0]; [\frac{10}{3} + |\frac{2}{3}| + \frac{2}{3} = \frac{14}{3}]$

21. Najděte všechny primitivní funkce $k f: y = \frac{1}{1 + \cos 2x}$;

22. $\int s \cos(3x - 1) dx$

23. Metodou per partes: $\int x^2 \sin x dx$

24. Dvěma způsoby vypočtete: $\int \cos^2 x dx$

25. * Substitucí $\int x \sqrt{x^2 + 5} dx$

26. * Substitucí $\int 5 \sin x \cos^5 x dx$

27. * Vypočtete $\int \frac{1}{1+\sin x}; x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

28. Vypočtete obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami: $y = 2x^2; y = x^2; y = 1$.

29. Vypočtete obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami: $y = -x^2 + 4x - 2; x + y = 2$.

30. Vypočtete objem tělesa, které vznikne rotací útvaru ohraničeného křivkami $y = \frac{x^2}{4}; y = \frac{x}{2} + 2$ kolem osy x .

31. Vypočtete objem tělesa, které vznikne rotací útvaru ohraničeného křivkami $x^2 + y^2 - 2x = 0; y = x$ kolem osy x .

32. Pomocí integr. počtu odvoďte vzorec pro objem rotačního kužele.

33. Určete objem rotačního paraboloidu o poloměru podstavy $r=3$ a výšce $v=6$. $[\frac{1}{2}\pi r^2 v]$

34. Vypočtete:

1. $(2 \cos x - 3 \sin x)dx = [2 \sin x + 3 \cos x + c]$

2. $\int(\sin x + \cos x)dx = [x - \frac{1}{2} \cos 2x + c]$

3. $\tan^2 x \cdot dx = [\tan x - x + 2]$ pozor na definiční obory...

4. $\cot^2 x \cdot dx = [-\cot x - x + c]$

35. Vypočtete:

1. $\int(3e^x + x)dx = [3e^x + \frac{1}{2}x^2 + c]$

2. $\int(2^x + 3^x)dx = [\frac{2^x}{\ln 2} + \frac{3^x}{\ln 3} + x]$

3. $\int(4^x + x^4)dx = [\frac{4^x}{\ln 4} + \frac{x^5}{5} + c]$

4. $\int a \cdot e^x \cdot dx = [ae^x + c]$

36. Vypočtete:

1. $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos x \cdot dx = [1]$

2. $\int_0^{\pi}(\cos x - \sin x) \cdot dx = [-2]$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \cdot dx = [1 - \frac{\pi}{4}]$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x + \sin x)dx = [1 + \frac{1}{8}\pi^2]$

37. Vypočtete:

1. $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = [\ln 2]$

2. $\int_0^1 e^x dx = [e - 1]$

3. $\int_2^4 2^x dx = [\frac{12}{\ln 2}]$

4. $\int_0^3 (\frac{1}{2})^x dx = [\frac{7}{8 \ln 2}]$

38. Vypočtete obsah množiny M ohraničené grafem funkce f a osou x :

1. $y = 4x - x^2; [\frac{32}{3}]$

2. $y = 4x + x^2; [\frac{32}{3}]$

3. $y = \sin x; x \in < 0; \pi >; [2]$

4. $y = \cos x; x \in < -\frac{1}{2}\pi; \frac{1}{2}\pi >; [2]$

39. Vypočtete obsah množiny M ohraničené grafy funkcí f, g :

1. $f: y = x^2; g: y = x + 2; \left[\frac{9}{2}\right]$
 2. $f: y = x^2 - 2x; g: y = 4x - x^2; [9]$
 3. $f: y = x^3; g: y = x; \left[\frac{1}{2}\right]$
40. Vypočítejte obsah množiny M, která je ohraničena křivkami:
1. $y = x^2; y = -x + 2; y = 0; \left[\frac{5}{6}\right]$
 2. $y = x^2; y = 6x - x^2; y = 0; [27]$
 3. $y = x^3; y = 8; y = 0; [20]$
 4. $y = 5x - x^2; y = x + 4; y = 0; x = 5; \left[\frac{59}{3}\right]$
41. Odvoďte vzorec pro objem:
1. koule o poloměru r; $\left[V = \frac{4}{3}\pi r^3\right]$
 2. kužele o poloměru podstavy r a výšce v; $\left[V = \frac{1}{3}\pi r^2 v\right]$
 3. komolého kužele s poloměry podstav r_1, r_2 a výškou v. $\left[\frac{1}{3}\pi v(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)\right]$
42. Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací množiny ohraničené elipsou $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ kolem osy x. $\left[\frac{4}{3}\pi a b^2\right]$
43. Odvoďte vzorec pro objem rotačního paraboloidu a poloměrem podstavy r a výškou v. $\left[\frac{1}{2}\pi r^2 v\right]$.